Vorlesung "Logische Grundlagen"

LG2: Prädikatenlogik, Quantoren, einfache Mengenlehre

Stichworte: Prädikate, Quantoren $\forall \exists \exists!$, Umgang mit Quantoren, Fundamente der Mathematik, Mengenlehre, Aussondern und Aufzählen, Verknüpfungen $\cap \cup \setminus$, Teilmengen $\subseteq$ $\not\subseteq$ $\subsetneq$, Potenzmengen, Russel-Antinomie

---

§1: Prädikatenlogik und Quantoren

Unser "Einsetzprinzip" mit Variablen soll im Folgenden in einem genauerem Rahmen erklärt werden. Wir gelangen auf diesem Wege zur Prädikatenlogik, welche diesem Prinzip entspricht und zusammen mit der Aussagenlogik eine Beschreibungsmöglichkeit mathematischer Zusammenhänge liefert.

Def.: Ein Prädikat ist ein Ausdruck mit Platzhaltern (Variablen) so, dass wannimmer man die Variablen durch Objekte des für die Variablen erlaubten Geltungsbereichs ersetzt (d.h. etwas EINSETZT), eine Aussage entsteht.

Bsp.: • "Jede gerade Quadratzahl ist durch 4 teilbar." ist eine atomare Aussage ohne Variable.
Gemeint ist: 4 ist durch 4 teilbar, 16 ist durch 4 teilbar, 36 ist durch 4 teilbar ...

Beispiele für Prädikate:

→ Wollen sagen: "Ist x eine gerade Quadratzahl, dann ist x durch 4 teilbar."
(x: Variable, wo gerade Quadratzahlen eingesetzt werden dürfen)

• "$x-y$ ist eine Quadratzahl" (x,y sind Zahlen, etwa natürliche Zahlen)
→ Bsp.: $3-5$ ist eine Quadratzahl (f) ($x=3$, $y=5$), $29-4$ ist eine Quadratzahl (w) ($x=29$, $y=4$).

• "$x>2 \Rightarrow x^2>4$", welche wahr für alle reellen Zahlen x ist
Bsp.: $3>2 \Rightarrow 3^2>4$, da $3>2$ w und $3^2>4$ w, etc.,
vgl. "ex falso quodlibet"

• "Ist x gerade Zahl, mindestens 4, dann ist x Summe von zwei Primzahlen", (Goldbachsche Vermutung), Wahrheitswert unbekannt.

Durch Hinzufügen von Quantoren an Prädikaten entstehen neue Aussagen:

Def.: Sei ein Prädikat $P(x)$ gegeben, wo x die Variable eines bestimmten Geltungsbereichs ist.

- Der Allquantor $\forall$ bedeutet "Für alle",
  in Formeln: $\forall x : P(x)$ ist die Aussage "Für alle x ist $P(x)$ richtig",
  also entsteht durch Einsetzen eines beliebigen x des Geltungsbereichs die wahre Aussage $P(x)$.
- Der Existenzquantor $\exists$ bedeutet "Es existiert",
  in Formeln: $\exists x : P(x)$ ist die Aussage
  "Es gibt (mindestens) ein x so, dass $P(x)$ richtig ist",
  also entsteht durch Einsetzen von mindestens einem x des Geltungsbereichs die wahre Aussage $P(x)$.
- Der Existenzquantor $\exists!$ bedeutet "Es existiert genau ein",
  in Formeln: $\exists!\, x : P(x)$ ist die Aussage
  "Es gibt genau ein x so, dass $P(x)$ richtig ist",
  also entsteht durch Einsetzen von ganz genau einem einzigen x des Geltungsbereichs die wahre Aussage $P(x)$.

Den Doppelpunkt spricht man meist als "so, dass".

Bem.: 1. Ist $P(x)$ ein Prädikat von nur einer Variablen x, so "bindet" ein Quantor diese Variable und es entsteht eine Aussage.

2. Ist $P(x,y,z,\ldots)$ ein Prädikat von mehreren Variablen $x,y,z,\ldots$, so entsteht durch Quantifizierung in x ein Prädikat in den Variablen $y,z,\ldots$,
(nämlich $\forall x : P(x,y,z,\ldots)$, $\exists x : P(x,y,z,\ldots)$, $\exists!\, x : P(x,y,z,\ldots)$).

3. "Es gibt höchstens ein x ..." kann zurückgeführt werden auf
"$\underbrace{\text{Es gibt kein } x \text{ mit}\ldots}_{\text{dies ist die Negation von "es gibt ein } x \text{ mit}\ldots\text{"}}$ oder es gibt genau ein x mit..."
Dafür wird (meist) kein separates Quantorenzeichen benutzt.

Ü Wie könnte also der Filmtitel "Highlander – es kann nur einen geben" für einen Mathematiker in seiner "Sprache" formuliert werden?

LG2

-3-

Regeln zur Negation von Prädikaten mit Quantoren:

Es gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg(\forall x: P(x)) \Leftrightarrow \exists x: \neg P(x) \\ \neg(\exists x: P(x)) \Leftrightarrow \forall x: \neg P(x) \end{array}} \Big\} \text{ Bei Negation „kehren sich die Quantoren um".}$$

1. Bsp.: "Es ist nicht so, dass jeder Tisch grün ist."
   $\Leftrightarrow$ "Es gibt einen Tisch, der nicht grün ist."
2. Bsp.: "Es ist nicht so, dass es einen grünen Tisch gibt."
   $\Leftrightarrow$ "Kein Tisch ist grün." $\Leftrightarrow$ "Alle Tische sind nicht grün."
3. Bsp.: Ü Was ist die Verneinung von $\exists! x : P(x)$?

Im Bsp.: x ist Variable für Tische, $P(x)$ ist "x ist grün", dann beschreiben die Formeln im Kasten genau diese Aussagen.

Die Reihenfolge von Quantoren ist wesentlich:

Sei t eine Variable für Töpfe, d eine Variable für Deckel. Weiter sei $P(d,t)$ das Prädikat "Der Deckel d passt auf den Topf t". Dann ist:

$\forall t \, \exists d : P(t,d)$ bedeutend zu "Zu jedem Topf gibt es einen passenden Deckel."

$\exists d \, \forall t : P(t,d)$ bedeutend zu "Es gibt einen Deckel, der passt auf jeden Topf."

Das bedeutet offensichtlich etwas verschiedenes!

Wir haben hier noch nicht erklärt, woher oder was die "Geltungsbereiche" für die Variablen sind. Wir wollen hierfür Mengen nehmen und werden deswegen als nächstes die Mengenlehre behandeln. Die gesamte Mathematik beruht hierauf:

Die Fundamente der modernen Mathematik:

Zu Beginn des 20. Jhd. hat man die Mathematik auf diese beiden Tragpfeiler gesetzt:

1. Jede mathematische Struktur wird mit Hilfe der Mengenlehre beschrieben und besteht aus Mengen. Selbst Abbildungen und Relationen können als Mengen aufgefasst werden (wir werden noch sehen, wie).
2. Axiome, Aussagen und Beweise werden in der Sprache der Prädikatenlogik aufgeschrieben ("formuliert").

Was wir als "abstrakten Formalismus" bezeichnen, setzt sich also im Detail alles aus Begriffen der Mengenlehre und Prädikatenlogik zusammen. Jede Formel bzw. Aussage lässt sich im Prinzip in kleinste "Bausteine" zerlegen.

§2: Elementare Mengenlehre

Idee: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten (die auch Mengen sind). Diese Objekte heißen Elemente der Menge.

Ist x ein Element der Menge M, schreibt man $x \in M$.

Wenn x kein Element der Menge M ist, schreibt man $x \notin M$, d.h. $x \notin M \Leftrightarrow \neg(x \in M)$.

Bsp: G sei die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Dann gilt $2 \in G$, $5 \notin G$.

Durch folgende Regeln können Mengen beschrieben oder definiert werden:

(a) durch explizite Aufzählung ihrer Elemente, z.B. ("…" ok, falls klar ist, was hier gemeint ist)

$\{1,3,7\}$, $\{2,17,4,3\}$, $\{1,\dots,10\}$,

wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt: $\{1,2\} = \{2,1\}$ usw.

(b) durch Aussondern: Ist A eine Menge und P eine Bedingung an die Elemente von A (genauer: P ist Prädikat in x und A der Wertebereich für x), so ist auch $\{x \in A \mid P(x) \text{ ist wahr}\}$ eine Menge. Kürzer: $\{x \in A \mid P(x)\}$,

lies "Menge der $x \in A$, für die $P(x)$ wahr ist",

man sagt auch "so dass" für | : ; bzw. "für die gilt"

für den vertikalen Strich "|" darin kann auch ":" oder ";" geschrieben werden.

Bsp: Wird die Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, … mit $\mathbb{N}$ bezeichnet, so ist $\{x \in \mathbb{N} \mid \underbrace{x \text{ ist gerade}}_{\text{ist ein Prädikat } P(x)}\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ die Menge der geraden Zahlen.

Kommas stehen für "und", wie fast immer

- Eine wichtige Menge ist die leere Menge, welche per Definition die Menge ohne Elemente ist. Sie wird mit $\emptyset$ und manchmal auch mit $\{\}$ bezeichnet. Durch Aussondern ist sie z.B. als $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq x\}$ beschreibbar.
- Weitere wichtige Bezeichnungen für Zahlbereiche sind $\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ (die Menge der ganzen Zahlen), $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\}$, und $\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen ($\rightsquigarrow$ vgl. Analysis).

Vom Definieren und der sinnvollen Wahl von Notationen:

Aussagen hatten wir stellvertretend mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet und gesehen, dass man auch längere Teile mit einem neuen Namen/Buchstaben abkürzen will. Dafür definiert bzw. setzt man die Aussage auf die neue Bezeichnung mit dem Zeichen $:\Leftrightarrow$, also z.B. $C :\Leftrightarrow A \lor \neg B$, so dass man anstelle $(A \lor \neg B) \land D$ danach einfacher $C \land D$ schreiben kann, falls das nützlicher ist. Generell bemüht man sich um sinnvolle Bezeichnungen/Notationen und sagt immer dazu, was für ein Objekt ein Buchstabe bezeichnen soll, z.B. "C sei die Aussage $C :\Leftrightarrow A \lor \neg B$". Der Doppelpunkt steht immer bei der neuen Bezeichnung, daher ginge auch z.B. $A \lor \neg B \Leftrightarrow: C$.

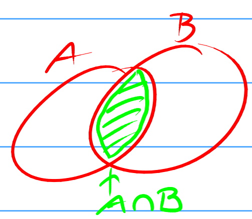
Jetzt in der Mengenlehre sollen Großbuchstaben $A, B, C, \ldots, M, N, \ldots$ auch Mengen bezeichnen. Wir wollen zum Definieren von Mengen ebenso vorgehen und z.B. $M := \{2, 4, -1\}$ schreiben. Solche Bezeichnungen bleiben dann solange gültig, wie man über sie spricht. Die universellen Bezeichnungen $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ gelten immer wie hier angegeben.

Für Variablen hatten wir bereits Kleinbuchstaben $x, y, z, t, d, \ldots$ benutzt.

Für Prädikate kann man mit $P(x) :\Leftrightarrow$ (Formel/Aussage in x) definieren, z.B. $P(x) :\Leftrightarrow x > 0$.

Mengenverknüpfungen $\cap, \cup, \setminus$

- Ein Spezialfall des Aussonderns ist die Durchschnittsbildung:
  Sind A und B Mengen, so setzt man
  $$A \cap B := \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \in B \mid x \in A\}.$$



Die Menge $A \cap B$ heißt (Durch-)Schnitt von A und B.
Die Elemente von $A \cap B$ sind genau die Elemente von A und von B, d.h. $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \land x \in B$.

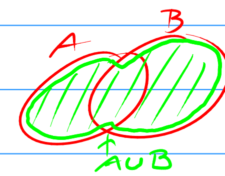
Bsp.: $A = \{2, 3, 4, 7, 11\}$, $B = \{3, 4, 11, 17, 19\}$, dann ist
$$A \cap B = \{3, 4, 11\}.$$

Bem.: Für jede Menge A gilt $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$.

LG2

- Die Vereinigung zweier Mengen A und B ist die Menge, die aus allen Elementen aus A oder B besteht und wird mit $A \cup B$ bezeichnet:

  $$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

  Bsp.: $A = \{2,3,4,7,11\}$, $B = \{3,4,11,17,19\}$, dann ist $A \cup B = \{2,3,4,7,11,17,19\}$.

Bem.: Für jede Menge A gilt $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$.

Teilmengen

Zwei Mengen sind gleich genau dann, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, also $A = B :\Leftrightarrow (\forall x \in A : x \in B) \wedge (\forall x \in B : x \in A)$. Gilt $A = B$, so kann in einer Formel mit B dann auch A eingesetzt werden und umgekehrt.

Def.: Sind A, B Mengen, so ist A Teilmenge von B (in Zeichen: $A \subseteq B$), falls $\forall x \in A : x \in B$. D.h.: $A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$.

Bem.: Statt $A \subseteq B$ kann man auch $B \supseteq A$ schreiben und sagt manchmal, B ist Obermenge von A. Weiter gilt immer $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$. Damit lässt sich $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ schreiben.

Der Strich $\subseteq$ am Teilmengenzeichen lässt man manchmal weg, wir wollen ihn der Deutlichkeit halber schreiben. Er bedeutet, dass bei "$A \subseteq B$" auch "$A = B$" möglich ist. Will man das ausschließen, schreibt man

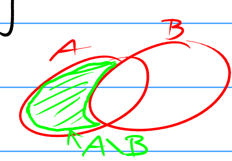
$$A \subsetneq B :\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

Im Gegensatz dazu ist $A \nsubseteq B :\Leftrightarrow \neg(A \subseteq B)$ eine andere Aussage, nämlich $\neg(A \subseteq B) \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \neg(\forall x \in A : x \in B) \Leftrightarrow \exists x \in A : x \notin B$.

Bsp.: Es gilt $\{1,2\} \nsubseteq \{2\}$, $\{1\} \subsetneq \{1,5\}$, $\{1\} \subseteq \{1,5\}$.

(Ü) Gilt eine Implikation zwischen $A \subsetneq B$ und $A \nsubseteq B$?

- Sind A und B Mengen, so heißt $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ das Komplement von B in A. Lies "A ohne B".

  Gelegentlich schreibt man $A - B$ ("A minus B"), eher selten.

  Bsp.: $\{3,2,4,5\} \setminus \{1,2,4,6\} = \{3,5\}$.

  Bem.: Somit gilt: $\neg(A \subseteq B) \Leftrightarrow \exists x \in A \setminus B$.

  Sind $A, B \subseteq C$, dann gilt: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B \Leftrightarrow \forall x \in C : x \in A \Rightarrow x \in B$.

Ein wichtiger Schritt ist nun, dass auch "Mengen von Mengen" untersucht werden können, z.B. $A := \{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \{4,1\}\}$, so dass $\emptyset \in A$, $\{3\} \in A$, $\{1,4\} \in A$ wahr ist. Später soll z.B. eine Gerade eine gewisse Menge von Punkten sein, und auch Mengen von Geraden sollen betrachtet werden etc.

Damit sind interessante Konstruktionen möglich: $A = \{1,2,3\}$, dann ist $B := \{\{x,y\} \mid x,y \in A\} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$.
Und $\{C \mid C \subseteq A\} = \{\emptyset\} \cup B \cup \{A\}$ ist die Menge aller Teilmengen von A, die für jede Menge A interessant ist:

- Ist A eine Menge, dann heißt die Menge aller Teilmengen von A die Potenzmenge von A, in Zeichen: $\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$.
  Bsp: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, beachten Sie, dass $\{\emptyset\} \neq \emptyset$, da ja $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
  $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ usw.

Hat A insgesamt n Elemente, so hat $\mathcal{P}(A)$ dann 2^n viele Elemente.

[Noch eine ganz andere Bemerkung am Rande zum "guten Aufschreiben": warum schreibe ich hier nicht "Hat A n Elemente, so hat $\mathcal{P}(A)$ 2^n Elemente."? Weil dann im Satz Formelteile zusammentreffen, was Verwirrung stiften kann! Versuchen Sie, dies zu vermeiden durch Umformulierung, etwa wie hier. Auch sollte ein deutscher Satz nie mit einer Zahl/Formel beginnen, stellen Sie nach Möglichkeit eine Beschreibung davor wie "Die Zahl 2 ist positiv" statt "2 ist positiv". Das sehen Sie sicher ein. 3.14 am Satzanfang taugt nix.]

Es ist wichtig, mit den Mengenbegriffen sauber zu hantieren. 1901 wies Bertrand Russel darauf hin, dass allzu naive Konstruktionen mit Mengen zu Widersprüchen führen kann, bekannt als Russelsche Antinomie bzw. Russelsches Paradox: Es gibt Mengen, die sich offensichtlich nicht selbst als Element enthalten: Alle bisher betrachteten Beispiele für Mengen A erfüllen $A \notin A$. Betrachte nun die Russel-Menge $R := \{A \mid A \notin A\}$. Gilt $R \in R$, muss $R \notin R$ gelten und umgekehrt! Die Auflösung dieses Paradox ist zu sagen, dass R keine Menge ist.