Vorlesung "Logische Grundlagen"

LG3: Beweistechniken und die Praxis des Beweisens

Stichworte: Formulierung eines Satzes, mehrere Voraussetzungsteile, Formulieren eines Beweises, direkte/indirekte Beweise, Kontrapositionsbeweise, Widerspruchsbeweise, Beweise von Sätzen mit Quantoren, Schubfachprinzip, Fallunterscheidungen, effiziente Beweise (z.B. Ringschluss, Mengengl.), Heuristik

---

§1: Praktische Beweistheorie

zunächst ein

Nachtrag zu Quantoren:

$\boxed{1}$
- $\forall t,\ G(t): H(t)$ — "Alle Tische, die grün sind, sind 1 m hoch"

ist äqu. zu $\forall t: G(t) \Rightarrow H(t)$ — "Alle Tische erfüllen: ist der Tisch grün, dann ist er 1 m hoch"

⚠ Ist aber nicht äqu. zu: $\forall t: G(t) \wedge H(t)$ — "Alle Tische sind grün und 1 m hoch"

$\boxed{2}$
- $\exists t,\ G(t): H(t)$ — "Es gibt einen grünen Tisch, der 1 m hoch ist"

ist äqu. zu $\exists t: G(t) \wedge H(t)$ — "Es gibt einen Tisch, der grün ist und 1 m hoch"

⚠ Ist aber nicht äqu. zu: $\exists t: G(t) \Rightarrow H(t)$ — "Es gibt einen Tisch mit der Eigenschaft: Wenn er grün ist, dann ist er 1 m hoch"

ist auch wahr, wenn es nur einen roten Tisch gibt!

Zur Formulierung von Sätzen

Mathematische Sätze in der Form "Satz: $\underset{\text{Voraussetzung}}{A} \Rightarrow \underset{\text{Behauptung}}{B}$" benutzen fast immer Quantoren, was wir hier in Anwendungsbeispielen studieren möchten:

1. Bsp.: Satz: $\underbrace{\text{Sind } U, V \text{ nichtleere Mengen mit } U \cap V = \emptyset}_{\text{Vor. } A}$, $\underbrace{\text{dann ist}}_{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ $\underbrace{V \not\subseteq U}_{\text{Beh. } B}$.

Auch formulierbar als:
- $\forall U, V$ nichtleere Mengen, $U \cap V = \emptyset: V \not\subseteq U$. (1)
- $\forall U, V$ Mengen: $\underbrace{U \neq \emptyset}_{A_1} \wedge \underbrace{V \neq \emptyset}_{A_2} \wedge \underbrace{U \cap V = \emptyset}_{A_3} \Rightarrow \underbrace{V \not\subseteq U}_{B}$. (2)

Haben: (1) $\Leftrightarrow$ (2) laut obiger Bem. $\boxed{1}$!

Als kompletter deutscher Satz z.B.: • Von zwei disjunkten nichtleeren Mengen kann die eine nicht Teilmenge der anderen sein.

LG3

Wir besprechen nun eine Anwendung von LG1:

Hatten in Notiz LG1 folgendes Lemma: Für beliebige Aussagen A, B, C gilt:

$$(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$$

Nach diesem Lemma ist $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \Rightarrow B \Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow B)$ richtig, so dass wir folgern: ② $\Leftrightarrow \forall U, V$ Mengen, $U \neq \emptyset \wedge V \neq \emptyset$: $U \cap V = \emptyset \Rightarrow V \not\subseteq U$.

"Für zwei nicht leere Mengen U, V gilt: Ist $U \cap V = \emptyset$, dann ist $V \not\subseteq U$."

Wir merken uns: Ist in der Behauptung eines Satzes eine Implikation $A_2 \Rightarrow B$ formuliert, können die Voraussetzungen um A_2 ergänzt werden.

Ein Satz in der Formulierung: "Satz: Vor.: A_1

Beh.: $A_2 \Rightarrow B$"

ist also äquivalent zur Formulierung: "Satz: Vor.: $A_1 \wedge A_2$

Beh.: B" (Beweis: s. Lemma!)

Wenn man die Bedeutung eines Satzes/einer Aufgabenstellung erschließen will, kann man auf diesem Wege auch alle Voraussetzungen zusammenfassen, was oft einfacher/verständlicher sein kann.

Als praktischen Tipp: Schreiben Sie Ihre Lösung von Klausur-/Übungsaufgaben in der Form wie hier auf als: "Vor.: ...

Beh.: ...

Bew.: ... □"

Dies ist für Ihren Korrektor übersichtlich und klar!

Als Beweis-Ende-Markierung dient das Zeichen "□" oder auch "qed" = quod erat demonstrandum bzw. "wzbw" = was zu beweisen war.

Der Satz im 1. Bsp. wäre dann z.B. schreibbar als:

Vor.: Seien U, V Mengen mit $U \neq \emptyset \wedge V \neq \emptyset \wedge U \cap V = \emptyset$.

Beh.: $V \not\subseteq U$.

Alternativ z.B.: Vor.: Seien U, V Mengen mit $U \neq \emptyset \wedge V \neq \emptyset$.

Beh.: Gilt $U \cap V = \emptyset$, dann ist $V \not\subseteq U$.

Bemerkung: "Seien" bzw. "Sei" ist Konjunktiv I für "Sind", "Ist", weiter "gelte" von "gilt"... Typischerweise drückt man Annahmen/Voraussetzungen auf diese Weise im Konjunktiv I aus.

2. Bsp.: Satz: Gerade Quadratzahlen sind durch 4 teilbar.

⇝ Umformulierung: Vor.: Sei n gerade Quadratzahl. (Konjunktiv, um Annahme/Vor. auszudrücken)

Beh.: 4 teilt n.

In Formeln: Vor.: $n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m, \exists k \in \mathbb{N} : n = k^2$. (Kommas heißen "und")

Beh.: $\exists l \in \mathbb{N} : n = 4l$.

Das Zerlegen der Aussage einer Aufgabe in seine Bestandteile ist oft hilfreich wie hier, meist liegt der Beweis danach auf der Hand.

Zu Beweisen

Hier: "Bew.: Ist $n = 2m = k^2$, so folgt, dass k gerade ist, also $k = 2j$ mit $j \in \mathbb{N}$.
Dann ist $n = k^2 = (2j)^2 = 4 \cdot j^2$, also ist mit $l = j^2$ die Beh. richtig. $\square$"

Ein Bew. in Bsp. 1 wäre etwa:

"Bew.: Ist $U \neq \emptyset \neq V$ mit $U \cap V = \emptyset$, dann ist $x \in V \setminus U$ für jedes $x \in V$,
da $V \neq \emptyset$ folgt also $\exists x \in V : x \notin U$, also $\neg(\forall x \in V : x \in U)$, also $\neg(V \subseteq U)$. $\square$"

Bem. dazu: • Anstelle der Wörter "Ist", "dann ist", "für jedes", "also" könnte man auch die entsprechenden Symbole $\Rightarrow, \forall$ usw. einsetzen, wenn man den Beweis ganz im "Kalkül" formulieren möchte. Diese drücken aber "Meta-"überlegungen aus, wie Sie schließen, d.h. wie Sie eine Schlusskette aufbauen, so dass es sich anbietet, für den Leser des Beweises dies so klarzustellen. Symbole und "Meta"-Wörter zu schmischen (etwa nur ein "also" durch "$\Rightarrow$" zu ersetzen) ist meist verwirrend und sollte möglichst vermieden werden.

• Das Wort "also" mehrmals zu verwenden ist völlig ok, solche Wiederholungen sind erwünscht: Wir schreiben keine Deutschaufsätze, sondern möchten präzise und verständlich sein.

• Die Formulierung "$P(x)$ gilt für jedes $x \in V$" heißt "$\forall x \in V : P(x)$",
"$P(x)$ gilt für ein $x \in V$" heißt "$\exists x \in V : P(x)$".

Manche Leute schreiben "$P(x)$ gilt $\forall x \in V$", oder "$P(x)\ \forall x \in V$", was eigentlich nicht erlaubt ist, da "Meta-"wörter durch Formelwörter ersetzt sind. Und die zweite Version ist darüberhinaus möglicherweise missverständlich.

Haben gesagt:

Direkter Beweis von $\overset{\text{Vor.}}{A} \Rightarrow \overset{\text{Beh.}}{B}$: Angabe einer Schlusskette $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_k \Rightarrow B$ aus bekannten Implikationen $A \Rightarrow C_1, C_1 \Rightarrow C_2, \ldots, C_k \Rightarrow B$.

Dies zeigen wir in noch einem weiteren Bsp.:

3. Bsp.: Satz: Sei x reelle Zahl mit $x^2=1$. Dann ist $x=1 \vee x=-1$.

Beweis: $x^2=1 \underset{\uparrow \text{Umformen}}{\Rightarrow} x^2-1=0 \underset{\uparrow \text{3. Bin. Formel}}{\Rightarrow} (x-1)(x+1)=0 \underset{\uparrow \text{Lemma: } xy=0 \Leftrightarrow x=0 \vee y=0}{\Rightarrow} x-1=0 \vee x+1=0 \underset{\leftarrow \text{Umformen}}{\Rightarrow} x=1 \vee x=-1$. □

- Hier ist die "Schlusskette" sehr klar. Ausführlicher mit "Meta"-sprache wäre etwa so:

Beweis: Sei $x^2=1$. Nach Umformen erhalten wir $x^2-1=0$. Die Anwendung der 3. binomischen Formel zeigt dann, dass $(x-1)(x+1)=0$ ist. Weil im Bereich der reellen Zahlen ein Produkt genau dann Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist, folgt $x-1=0$ oder $x+1=0$. Also ist (wieder nach Umformen) $x=1$ oder $x=-1$. qed

- Fraglich, was übersichtlicher ist! Eine ausführliche Version kann deutlich verständlicher sein. Was besser ist, kommt im Einzelnen darauf an.

Indirekte Beweise

1. Die erste Art des indirekten Beweises ist der Kontrapositionsbeweis, d.h. der direkte Beweis von $\neg B \Rightarrow \neg A$. Unter der Annahme $\neg B$ (die neue Vor. in diesem Beweis) wird $\neg A$ hergeleitet mittels einer Schlusskette $\neg B \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_k \Rightarrow \neg A$. Beim Aufschreiben eines solchen Beweises muss zunächst $\neg B$ formuliert werden als Annahme, die manchmal auch im Konjunktiv steht.

4. Bsp.: Satz: Vor.: Sei $k \in \mathbb{N}$ und 10^k nicht durch 4 teilbar. Beh.: $k=1$.

Bem.: Haben hier: $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$, d.h. $\neg B \Rightarrow \neg A_1 \vee \neg A_2$ ⇝ 1. Version

Äquivalent dazu ist: $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B)$, d.h. $A_1 \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A_2)$ → 2. Version

Bw. in 1. Version: Ist $k \neq 1$, dann ist $k \notin \mathbb{N}$ oder (wenn $k \in \mathbb{N}$) $k \geq 2$.

Also ist $k \notin \mathbb{N}$ oder (wenn $k \in \mathbb{N}$) $10^k = 4 \cdot 25 \cdot \underbrace{10^{k-2}}_{\in \mathbb{N},\ \text{da } k-2 \geq 0}$ durch 4 teilbar. □

Die 2. Version ist einfacher und klarer:

Bw. in 2. Version: Sei (für diesen Beweis) $k \in \mathbb{N}$. Ist $k \neq 1$, dann ist also $k \geq 2$.

Es folgt, dass $10^k = 4 \cdot 25 \cdot \underbrace{10^{k-2}}_{\in \mathbb{N},\ \text{da } k-2 \geq 0}$ durch 4 teilbar ist. □

Fazit: In Kontrapositionsbeweisen möchten wir "Grundannahmen" wie "Geltungsbereiche" als unveränderten Voraussetzungsteil beibehalten. Die Verwendung des Konjunktivs nur dafür macht "Grundannahmen" deutlich.

2. Die zweite Art des indirekten Beweises ist der Widerspruchsbeweis, dabei wird $A \wedge \neg B \Rightarrow C$ bewiesen (wo C falsch ist wie $0=1$ "Widerspruch"), was äqu. ist zu $A \Rightarrow B$, vgl. LG1.
Ein Widerspruchsbeweis ist also die Herleitung eines Widerspruchs C aus der Annahme $\neg B$ (und der Voraussetzung A), d.h. unter der Annahme, die Behauptung B sei falsch.
[Manche Leute verstehen das Wort "Annahme" nur so wie hier als Annahme des Gegenteils einer Behauptung in einem Widerspruchsbeweis. Nein: eine "Annahme" ist generell eine Voraussetzung, die man als wahr annimmt...]

Das Aufschreiben eines Widerspruchsbeweises geschieht in drei Schritten:

1. Formulierung der Annahme $\neg B$, wie z.B. "angenommen, B gelte nicht"
2. Formulierung eines direkten Beweises von $A \wedge \neg B \Rightarrow C$, d.h. die Herleitung von C aus der Annahme $\neg B$ und der Vor. A.
3. Feststellung, dass C falsch (oder $C \Leftrightarrow \neg A$) ist: "Widerspruch", "$\lightning$", und Beweis-Ende.

5. Bsp.: Satz: Für $x > 9$ hat die Glg. $\sqrt{x} = 2$ keine Lösung.
Beweis (durch Widerspruch):

1. Angenommen, $x \in \mathbb{R}$ sei eine Lösung der Glg. $\sqrt{x} = 2$.
2. Dann folgt $2 = \sqrt{x} > \sqrt{9} = 3$, also $2 > 3$.
   da $x > 9$ und die $\sqrt{\ }$-Fkt. streng mon. w.
3. Widerspruch, da $2 > 3$ falsch ist. $\square$

Kürzer: Beweis (durch Widerspruch): Andernfalls/Ansonsten sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{x} = 2$. Dann folgte $2 = \sqrt{x} > \sqrt{9} = 3$, also wäre $2 > 3$ $\lightning$. $\square$

"Ja wenn die Gleichung eine Lösung x hätte, dann wäre $2 = \sqrt{x} > \sqrt{9} = 3$, was aber falsch ist." → Hier wird das indirekte Schließen mit dem Konjunktiv II (hätte/wäre..) ausgedrückt. Manche sagen, ein Widerspruchsbeweis sollte der Genauigkeit halber komplett im Konjunktiv II ausgedrückt werden, um den "irrealen Sachverhalt", der zum Widerspruch geführt wird, zu verdeutlichen. Bei langen Widerspruchsbeweisen würde ich nur die Annahme $\neg B$ im Konjunktiv II formulieren.

LG3

-6-

Beweise von Sätzen mit Quantoren

1. Beweis eines Satzes mit dem Existenzquantor $\exists$: Satz: $\underbrace{A}_{\text{Vor}} \Rightarrow \underbrace{\exists x \in M : P(x)}_{\text{Beh. B mit "}\exists\text{"}}$

Durch (ev. konstruktive) Angabe eines Elements x, für das $P(x)$ gezeigt werden kann, ist der Beweis geführt.

$\exists k$: $2^{2^k}+1$ nicht prim

6. Bsp.: Satz: Beh.: Es gibt eine Zahl der Form $2^{2^k}+1$, $k \in \mathbb{N}$, die keine Primzahl ist (d.h. aus zwei Faktoren >1 zusammenges. ist).

Bew.: Für $k=5$ ist die Zahl $2^{2^5}+1 = 641 \cdot 6700417$ zusammengesetzt. $\square$

Oft kann eine solche explizite Konstruktion wie hier nicht geschafft werden. Gelegentlich kommen "Abzählargumente" zum Einsatz, das bekannteste ist das Dirichletsche Schubfachprinzip (engl. pigeon hole principle):

Werden k Objekte auf n Mengen $M_1, \dots, M_n$ verteilt, und ist $k > n$, so existiert eine Menge M_j, die (mind.) zwei Objekte enthält.

Heißen die Objekte $a_1, \dots, a_k$ (paarweise verschieden, d.h. $\forall \mu, \nu \in \{1, \dots, k\}, \mu \neq \nu : a_\mu \neq a_\nu$), dann folgt aus dem Prinzip:

$$\exists j \in \{1, \dots, n\} \; \exists \mu, \nu \in \{1, \dots, k\} : \mu \neq \nu \wedge a_\mu, a_\nu \in M_j .$$

[Eine andere Formulierung: Gilt $M = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$ und hat M genau k Elemente ($k>n$), dann ex. ein T_i mit mehr als einem Element.]

Beachten Sie, dass eine Menge M_j mit mehr als einem Objekt nicht explizit angegeben werden kann. Alle Beweise, die auf diesem Prinzip beruhen, sind nicht konstruktiv in dem Sinne, dass sie reine Existenzbeweise sind, d.h. keine Konstruktion ermöglichen.

7. Bsp.: Satz: Es gibt im vollbesetzten Hörsaal M1 zwei Menschen, die am gleichen Tag Geburtstag haben.

Beweis: Im M1 haben 400 Personen Platz, das Jahr hat (maximal) 366 Tage. Nach dem Schubfachprinzip haben mind. 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag. $\square$

[Wer das ist, kann der Beweis nicht sagen!]

Ein Beweis des Schubfachprinzips: Wenn die Beh. nicht stimmt, landet in jeder Menge M_i höchstens ein Element, dann gibt es höchstens soviele Elemente k wie "Fächer" M_i, also $k \leq n$. $\square$

Voraussetzung — Beh. B mit "$\forall$"

2. Beweis eines Satzes mit dem Allquantor $\forall$: Satz: $A \Rightarrow \forall x \in M : P(x)$

Durch Nachweis von $P(x)$ für jedes Element x ist der Beweis geführt.

a) Dies kann durch expliziten Beweis für jedes El. x der Reihe nach erbracht werden, falls es nicht zuviele Elemente sind.

b) Man führt den Beweis von $P(x)$ für jedes beliebige, aber fest gewählte x, auf abstraktem Wege (mit dem Namen "x" für das untersuchte Element).

c) Man teilt M auf in separate Teilmengen $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$ und beweist $P(x)$ für jedes $x \in M_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, separat. Man sagt, man macht eine Fallunterscheidung (mit n vielen "Unterbeweisen", wo wieder a), b) oder c) benutzt werden können).

Wir zeigen dieses Vorgehen anhand von Beispielen:

8. Bsp. für 2.a): Satz: Für alle natürlichen Zahlen $k \leq 4$ ist $2^{2^k} + 1$ eine Primzahl.

Beweis: Die Zahl $2^{2^1} + 1 = 5$ ist prim, $2^{2^2} + 1 = 17$ ist prim, $2^{2^3} + 1 = 257$ ist prim (da keine Primzahl $< \sqrt{257} \approx 16$ Teiler ist), $2^{2^4} + 1 = 65537$ ist prim (da keine Primzahl $< \sqrt{65537} \approx 256$ Teiler ist). $\square$

- Man kann hier die einzelnen Elemente in einer "Liste" abarbeiten.

9. Bsp. für 2.b): Satz: Für alle reellen Zahlen x, y gilt $4xy \leq (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$.

Bew.: Zur 1. Beh. $4xy \leq (x+y)^2$: Es gilt $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$
$\Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$.

Zur 2. Beh. $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$: Es gilt $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$. $\square$

- Für beide Teile der Behauptung wurde der Beweis abstrakt geführt mit den Rechenregeln reeller Zahlen und der Tatsache, dass $u^2 \geq 0$ ist für jede reelle Zahl u.

10. Bsp., für 2c): Satz: Jede Quadratzahl lässt bei Division durch 8 den Rest 0, 1 oder 4.

Beweis: 1. Fall: n gerade: Wenn n gerade ist, ist $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $n^2 = 4k^2$.

Zwei Unterfälle:
- Falls k gerade, etwa $k = 2l$ mit $l \in \mathbb{N}$, ist $n^2 = 4 \cdot (2l)^2$ durch 8 teilbar, lässt also Rest 0.
- Falls k ungerade, etwa $k = 2l+1$ mit $l \in \mathbb{N}$, lässt $n^2 = 4(2l+1)^2 = 16l^2 + 16l + 4$ den Rest 4.

2. Fall: n ungerade: Wenn n ungerade ist, ist $n = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, und $n^2 = 4k(k+1) + 1$ lässt den Rest 1, weil $k(k+1)$ stets gerade und daher $4k(k+1)$ durch 8 teilbar ist. $\square$

Varianten von Beweisen ⇝ v.a.: "effiziente" Beweise

① **Der Ringschluss:** Hat eine Behauptung die Form $B_1 \Leftrightarrow B_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow B_k$, z.B. als "... dann sind folgende Aussagen äquivalent: 1) B_1, 2) B_2, ..., k) B_k", so muss nicht jede Äquivalenz einzeln gezeigt werden! Es genügt, nur Beweise von 1.) $B_1 \Rightarrow B_2$, 2.) $B_2 \Rightarrow B_3$, 3) ..., k.) $B_k \Rightarrow B_1$ zu erbringen!
Ein Beweis von z.B. $B_2 \Leftarrow B_3$ folgt daraus bereits über den "Umweg"
$B_3 \Rightarrow B_4 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_k \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2$, und analog für die anderen Implikationen.
Hier wird ein Beweis effizient organisiert, indem für den Beweis überflüssige Implikationen ausgelassen werden. Der Ringschluss ist kein Zirkelschluss, wo fälschlicherweise die zu zeigende Behauptung in einem (falschen) Beweis verwendet wird.

② **Mengenvergleiche:** Soll die Gleichheit zweier Mengen $U = V$ gezeigt werden, genügt es, die beiden Behauptungen $U \subseteq V$ und $U \supseteq V$ einzeln zu beweisen. Meistens ist eine der beiden Inklusionen $\subseteq, \supseteq$ leicht zu zeigen.

11. Bsp.: Satz: Seien U, V Mengen. Ist $U \subseteq V$, dann gilt $V \cup U = V$.

Beweis: „$\supseteq$" ist klar, zu „$\subseteq$": Sei $x \in V \cup U$, dann ist $x \in U$ oder $x \in V$.

Fallunterscheidung!
- Ist $x \in U$, so folgt $x \in V$ weil $U \subseteq V$ vorausgesetzt wurde.
- Ansonsten ist auch $x \in V$.

Somit folgt für jedes $x \in V \cup U$, dass $x \in V$ gilt, d.h. es folgt $V \cup U \subseteq V$. □

Bem.: Alternativen in Fallunterscheidungen sind mit "oder" verknüpft, denn $x \in M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_m$ bedeutet $x \in M_1 \vee x \in M_2 \vee \ldots \vee x \in M_m$.

Ü) Zeigen Sie: Satz: Seien U, V Mengen. Ist $U \subseteq V$, dann gilt $V \cap U = U$.
Wie ändert sich der obige Beweis hier?

③ **Widerlegen von Sätzen / Beweise von negierten Quantorenaussagen:**

a) Ist ein Satz der Form $A \Rightarrow \forall x: P(x)$ zu widerlegen, wird $\neg(A \Rightarrow \forall x: P(x))$ gezeigt, was äqu. ist zu $A \wedge \neg(\forall x: P(x)) \Leftrightarrow A \wedge \exists x: \neg P(x)$. Dazu muss ein x angegeben werden, für dass $\neg P(x)$ gilt, also ein Gegenbeispiel angegeben/konstruiert bzw. dessen Existenz bewiesen werden (unter der Vor. A).

b) Ist ein Satz der Form $A \Rightarrow \exists x: P(x)$ zu widerlegen, wird $\neg(A \Rightarrow \exists x: P(x))$ gezeigt, was äqu. ist zu $A \wedge \neg(\exists x: P(x)) \Leftrightarrow A \wedge \forall x: \neg P(x)$. Dazu muss für jedes x dann $\neg P(x)$ gezeigt werden (unter der Vor. A).