Vorlesung "Logische Grundlagen"

LG4: Natürliche Zahlen und die vollständige Induktion

Stichworte: Peano-Axiome, Konstruktion der natürlichen Zahlen, Peano-Arithmetik, Rekursion/Iteration, Zeichen Π und Σ, Grenzen der Peano-Arithmetik: Goodstein-Folgen, Prinzip der vollständigen Induktion, Beweise mit vollständiger Induktion

---

§1: Konstruktion der natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ werden erklärt durch ihre Eigenschaften, die von G. Peano axiomatisch formuliert wurden.
Diese sogenannten Peano-"Axiome" lauten wie folgt:
$\mathbb{N}_0$ ist eine Menge mit (i) einem Element $0 \in \mathbb{N}_0$, (ii) für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es einen Nachfolger $s(n) \in \mathbb{N}$,
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : s(n) \neq 0$ ⌜0 ist nicht Nachfolger einer nat. Zahl⌟
(iv) $\forall m, n \in \mathbb{N}_0 : s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$. ⌜Eindeutigkeit des Vorgängers⌟
(v) $\forall X$, X Menge, $0 \in X : (\forall n \in X : s(n) \in X) \Rightarrow \mathbb{N}_0 \subseteq X$. ⌜Induktionsprinzip⌟

Letztere Eigenschaft (v) besagt: Eine Menge, die 0 und mit jeder nat. Zahl n darin auch ihren Nachfolger $s(n)$ enthält, enthält alle nat. Zahlen.
Auf dem Prinzip (v) beruht das Beweisverfahren der vollständigen Induktion, welches wir hier einführen und wofür wir später nützliche Varianten zeigen werden.
Die Eigenschaften (i)-(v) sind keine "echten" Axiome, da sie aus den Axiomen der Mengenlehre (die ZFC-Axiome) und denen der Prädikatenlogik (z.B. Hilbert-Kalkül) hergeleitet werden können:

Existenz der natürlichen Zahlen

Die Existenz einer Menge $\mathbb{N}_0$ mit diesen Eigenschaften kann man nun wie folgt durch Angabe einer Konstruktion zeigen, die (i)-(v) erfüllt. Das ist etwa diese:
Ist $0 := \emptyset$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ der Nachfolger $s(n)$ def. durch $s(n) := n \cup \{n\}$, haben wir
$0 := \emptyset$, $1 := s(0) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$, $2 := s(1) = s(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$
$3 := s(2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$, ...

Nun muss für diese Konstruktion gezeigt werden (mit den ZFC-Axiomen und der Prädikatenlogik wie z.B. im Hilbert-Kalkül gegeben), dass (i)-(v) gelten. Das stellt sich als machbar heraus. Insbesondere muss dafür das Unendlichkeitsaxiom verwendet werden, welches im wesentlichen besagt, dass es Mengen mit unendlich vielen Elementen gibt. Die präzise Fassung des Axioms lernen wir später noch kennen, wenn wir die ZFC-Axiome auflisten werden; nach diesem ist $\mathbb{N}_0$ eine unendliche Menge. Den Beweis für (i)-(v) lassen wir hier weg.

[Eine alternative Konstruktion von $\mathbb{N}_0$ ist $0 := \emptyset$, $s(n) := \{n\}$ d.h. $1 := \{\emptyset\}$, $2 := \{\{\emptyset\}\}$, ..., für diese kann ebenso (i)-(v) gezeigt werden, aber auch nicht einfacher.]

Man kann mit $s(n)$ die übliche Addition "+" erklären, nämlich mit

$$n+0 := n, \quad n+1 := s(n),$$

$$\text{sowie} \quad n+2 := s(s(n)), \ldots, \quad n+m := \underbrace{s(s(\ldots s(n))\ldots)}_{m \text{ mal } s \text{ anwenden}},$$

$$\text{bzw. } n+\underbrace{(m+1)}_{s(m)} := s(n+m) \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0$$

Die Addition hat dann die bekannten Rechenregeln als Eigenschaften (Assoziativität, ...). Die Peano-Axiome und ihre daraus resultierenden Rechengesetze bezeichnet man als Peano-Arithmetik.

Das Axiom (v) von Peano hängt eng zusammen mit dem Begriff einer rekursiven/induktiven Definition:

Sei $x(n)$ ein Objekt, welches von einer nat. Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ abhängt, und sei eine feste Bildungsvorschrift F gegeben, mit der ein neues Objekt $F(x(n))$ gebildet wird. Dieses nennen wir $x(n+1)$, d.h. $x(n+1) := F(x(n))$.

Zusammen mit einem Startwert $x(0)$ [oder irgendeinem $x(n_0)$ mit $n_0 \in \mathbb{N}$] erhalten wir eine Folge von Objekten

$$x(0),\ x(1) = F(x(0)),\ x(2) = F(F(x(0))),\ x(3) = F(F(F(x(0)))), \ldots$$

$$\ldots\ x(n) = \underbrace{F(F(\ldots F}_{n\text{-mal}}(x(0))\ldots)\ \ldots$$

- Diese Folge kann also durch Angabe von

  $x(0)$, $\quad x(n+1) := F(x(n))$ $\quad$ definiert werden (rekursiv/induktiv)

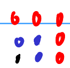
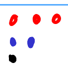
- Ebenso kann dieselbe Folge iterativ definiert werden durch Angabe von

  $x(0)$, $\quad x(n) := \underbrace{F(F(\ldots F}_{n\text{-mal}}(x(0))\ldots)$ mit "Pünktchen".

  Hier wird eine Definition als eine (n-fache) Wiederholung von F ausgedrückt.

Bei der rekursiven Definition wird auf bereits vorher definierte Objekte zurückgegriffen, um den Wert des "nächsten" Objekts für $n+1=s(n)$ zu erklären. Das muss nicht nur ein einziges vorher definiertes Objekt sein, die Bildungsvorschrift F kann auch mehrere Objekte betreffen, also z.B. $x(n+1) := F(x(1), x(2). x(n))$ oder $x(n+1) := F(x(n-2), x(n-1))$ … sind möglich, wenn genügend Startwerte gegeben sind.

Schreibweisen mit "Pünktchen" sind meist gewisse Aufzählungen, die vom Kontext her klar sind, sie meinen meist eine iterative Bildungsvorschrift. Sie können durch eine rekursive Bildungsvorschrift oder explizite Angabe präzisiert werden. Hier einige Beispiele:

Folge	Pünktchen	iterativ	rekursiv	explizit
 Quadratzahlen	1, 4, 9, 16, 25, 36, …	$q_n = \underbrace{n+\ldots+n}_{n\text{ mal}}$	$q_1=1,\ q_{n+1}=q_n+2n+1$	$q_n=n^2$
 Dreieckszahlen	1, 3, 6, 10, … (klar?) bzw. 1, 1+2, 1+2+3, … (klarer)	$d_n=1+2+\ldots+n$	$d_1=1,\ d_{n+1}=d_n+n+1$	$d_n=\frac{n(n+1)}{2}$ [kleiner Gauß]
Mengenvereinigungen	$X_1=M_1,\ X_2=M_1\cup M_2,\ldots$	$X_n=M_1\cup\ldots\cup M_n$	$X_1=M_1,\ X_{n+1}=X_n\cup M_n$	$X_n=\bigcup_{i=1}^{n} M_i$
Mengendurchschnitte	$Y_1=M_1,\ Y_2=M_1\cap M_2,\ldots$	$Y_n=M_1\cap\ldots\cap M_n$	$Y_1=M_1,\ Y_{n+1}=Y_n\cap M_n$	$Y_n=\bigcap_{i=1}^{n} M_i$
Summen	$a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ldots$	$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$	$s_1=a_1,\ s_{n+1}=s_n+a_{n+1}$	$s_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$
→ Vielfache (von n)	$a,\ a+a,\ a+a+a,\ldots$	$v_n=\underbrace{a+\ldots+a}_{n\text{-mal}}$	$v_1=a,\ v_{n+1}=v_n+a$	$v_n=n\cdot a$
Produkte Fakultät	$a_1,\ a_1\cdot a_2,\ a_1\cdot a_2\cdot a_3,\ldots$ $1,\ 1\cdot 2,\ 1\cdot 2\cdot 3,\ldots$ bzw. $1,\ 2,\ 6,\ 24,\ldots$	$p_n=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$ $n! = 1\cdot 2\cdots n$	$p_1=a_1,\ p_{n+1}=p_n\cdot a_{n+1}$ $1!=1,\ (n+1)!=(n!)\cdot(n+1)$	$p_n=\prod_{i=1}^{n} a_i$ $n!$
(n-te) Potenz	$a,\ a\cdot a,\ a\cdot a\cdot a,\ldots$	$P_n=\underbrace{a\cdots a}_{n\text{-mal}}$	$P_1=a,\ P_{n+1}=P_n\cdot a$	$P_n=a^n$
Fibonacci-Zahlen	0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …	? jeder Versuch gibt unschöne Formeln	$f_1=0,\ f_2=1,\ f_{n+1}=f_{n-1}+f_n$	$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ (Binet'sche Formel)

- Da man häufig über Summen/Produkte/Potenzen spricht, hat man für sie die expliziten Zeichen $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$, $a^n \left(=\prod_{i=1}^{n} a\right)$ erfunden.
Ihre Definition ist wie oben rekursiv möglich. Dabei ist folgende Setzung der Startwerte nützlich:
  - Die leere Summe ist $:=0$, d.h. $\sum_{i=1}^{0} a_i := 0$.
  - Das leere Produkt ist $:=1$, d.h. $\prod_{i=1}^{0} a_i := 1$.

(Die "leere Potenz" ist in diesem Sinne $a^0 := 1$.)
Das Summenzeichen/Produktzeichen ist so zu verstehen, dass "i" ein Laufindex ist, der die Elemente von $\{1,2,\dots,n\}$ der Reihe nach "durchläuft". Eine Verallgemeinerung dieser Zeichen zu Laufindizes $i \in M$ mit einer geg. (endlichen) Menge M ist möglich, häufig stehen sogar noch zusätzliche Bedingungen dabei, z.B.:

$$M=\{2,4,6,8\} \rightsquigarrow \sum_{i\in M} a_i = \sum_{\substack{i\le 8\\ i \text{ gerade}}} a_i = \sum_{\substack{i=1\\ i\text{ gerade}}}^{8} a_i = \sum_{i=1}^{4} 2i = a_2+a_4+a_6+a_8.$$

Sind die zusätzlichen Bedingungen unerfüllbar, d.h. falsch für die Elemente der Indexmenge, ist die Summe leer (also $=0$), bzw. das Produkt leer (also $=1$), z.B.: $\sum_{\substack{i=2\\ 5 \text{ teilt } i}}^{4} a_i = 0$, $\prod_{\substack{i=2\\ 5\text{ teilt } i}}^{4} a_i = 1$.

- Zusammenhang zwischen Rekursionen und dem Peano-Axiom (v):
Mit dem Peano-Axiom (v) kann man beweisen, dass stets eindeutig eine Folge existiert, die einer gegebenen rekursiven Bildungsvorschrift genügt. Laut diesem Satz ist es also möglich, Folgen über Rekursionen zu definieren. Da der Beweis dieses Satzes erstaunlich lang und kompliziert ist, lassen wir ihn hier weg.
- Weiter kann jede iterative Definition auch durch eine rekursive Definition ersetzt werden. Umgekehrt ist das nicht immer der Fall, wie man am Beispiel der Fibonacci-Folge sehen kann.
- Noch eine letzte theoretische Bemerkung zu den Peano-Axiomen: Die sogenannten Goodstein-Folgen lassen sich mit (i)-(v) definieren, aber ihre Eigenschaft, dass diese bei 0 enden (Satz von Goodstein), ist nicht mit (i)-(v) beweisbar. Um zu zeigen, dass Goodstein-Folgen bei 0 enden, müssen Verschärfungen von Axiom (v) herangezogen werden.

Das Prinzip der <u>vollständigen Induktion</u> (VI):

Es lautet:

(VI): $\forall A(x)$, Aussage/Prädikat in x: $A(0) \wedge (\forall m \in \mathbb{N}_0: A(m) \Rightarrow A(m+1)) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}_0: A(m)$

und bedeutet: Für jede Aussage in x gilt: Ist $A(0)$ wahr und ist für jede natürliche Zahl n wahr, dass mit $A(n)$ auch $A(n+1)$ richtig ist, dann gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$.

⌜Anschaulich: $A(0) \Rightarrow A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \ldots$⌟

Bem.:

1. Die Startaussage "$A(0)$" muss nicht unbedingt bei $n=0$ sein, das Prinzip ist auch für jeden anderen Startwert $n_0 \in \mathbb{N}$ richtig.
2. Die Startaussage "$A(0)$" heißt <u>Induktionsanfang</u>, die Implikation "$A(n) \Rightarrow A(n+1)$" heißt <u>Induktionsschritt</u>.
3. Nach dem Prinzip (VI) können Beweise von Aussagen über (alle) natürliche Zahlen geführt werden, man erhält so die Beweismethode der vollständigen Induktion, wofür wir gleich Beispiele bringen. Allerdings lässt sich nicht jede Aussage über natürliche Zahlen so beweisen.
4. <u>Satz</u>: Das Prinzip (VI) ist äquivalent zum Peano-Axiom (v).

<u>Beweis</u>: Hatten (v): $\forall X$, X Menge, $0 \in X$: $(\forall n \in X: s(n) \in X) \Rightarrow \mathbb{N}_0 \subseteq X$.

<u>Zu (v) ⇒ (VI)</u>: Zu $A(x)$ betr. $X := \{n \in \mathbb{N}_0;\ A(n) \text{ wahr}\}$. Da $A(0)$ gilt, ist $0 \in X$. Und aus $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt, dass mit $n \in X$ stets $s(n) = n+1 \in X$ folgt. Nach (v) folgt $\mathbb{N}_0 \subseteq X$. Da $X \subseteq \mathbb{N}$ laut Def. von X gilt, ist $\mathbb{N}_0 = X$. Also gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

<u>Zu (VI) ⇒ (v)</u>: Zu X betr. die Aussage $A(x) :\Leftrightarrow x \in X$. Da $0 \in X$ gilt, ist $A(0)$ wahr. Und aus $\forall n \in X: s(n) \in X$ folgt, dass aus $A(n)$ $\underbrace{\text{d.h. } n \in X}$ stets $A(n+1)$ folgt. Nach (VI) folgt, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist, d.h. $\mathbb{N}_0 \subseteq X$. □

5. Jede explizite Formel für eine rekursiv definierte Zahlenfolge $z_0 \in \mathbb{N}_0$, $z_{n+1} := F(z_n)$ kann mit vollständiger Induktion bewiesen werden. Lautet $z_n = G(n)$ die zu zeigende explizite Formel, so gelingt der Induktionsschritt, falls $F(G(n)) = G(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Das sehen wir in den Beispielen.

<u>1. Bsp.:</u> Der Satz vom kleinen Gauß: Für die Dreieckszahlen $d_1 := 1$, $d_{n+1} := d_n + (n+1)$ gilt: $\forall n \in \mathbb{N}: d_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis (vollst. Ind.): • Induktionsanfang: ist $n = 1$, ist $d_1 = \frac{1(1+1)}{2}$ richtig.

• Induktionsschritt: ist für ein (beliebiges, aber festes) $n \in \mathbb{N}$ die Formel $d_n = \frac{n(n+1)}{2}$ richtig, dann folgt $d_{n+1} \underset{\text{Rekursion}}{=} d_n + (n+1) \underset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$, also ist die Formel auch mit $n+1$ anstelle von n richtig. Nach dem Prinzip (VI) folgt, dass die Formel für <u>alle</u> $n \in \mathbb{N}_0$ stimmt. $\square$

Ü <u>2. Bsp.:</u> Für die Rekursion $w_1 = 2$, $w_{n+1} = w_n + (n+1)(n+2)$ kann so $w_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ gezeigt werden.

<u>Bem.:</u> Wir zeigen noch zwei zum Induktionsprinzip äquivalente Varianten, die in der Praxis auch häufig benutzt werden. ⌜Ganz selten kommen sogar noch andere Varianten zum Einsatz, z.B. kann der Induktionsschritt durch die Implikationen $A(n) \Rightarrow A(2n)$, $A(n) \Rightarrow A(n-1)$ ersetzt werden.
Für die Variante brauchen wir noch das Zeichen "$\leq$" für natürliche Zahlen:

<u>Def.:</u> Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ ist $n \leq m \;:\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{N}_0 : \underbrace{n + k}_{\text{wie oben definiert}} = m$.
Weiter: $n < m \;:\Leftrightarrow\; n \leq m \wedge n \neq m$.

<u>1. Variante:</u> (VI') Angenommen, $X \subseteq \mathbb{N}_0$ ist eine Teilmenge mit $0 \in X \wedge (\forall m \in \mathbb{N}_0, m < n: m \in X \Rightarrow n \in X)$. Dann ist $X = \mathbb{N}_0$.

<u>2. Variante:</u> (M) Jede nichtleere Teilmenge X von $\mathbb{N}_0$ hat ein <u>kleinstes Element</u> $a \in X$, d.h. so dass $\forall n \in X: a \leq n$ gilt.

<u>Satz:</u> (VI) $\Leftrightarrow$ (VI') $\Leftrightarrow$ (M).

<u>Beweis</u> (durch Ringschluss):

⌜direkt⌟ ⤳ <u>Zu (VI) $\Rightarrow$ (VI'):</u> Sei $X \subseteq \mathbb{N}_0$ eine Menge, die die Eigenschaft in (VI') erfüllt.
Setze $Y := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid m \in X \text{ für alle } m \leq n\}$. Dann gilt $0 \in Y$.
Wenn $n \in Y$, dann gilt $m \in X$ für alle $m \leq n$, also gilt dann $n+1 \in X$ ⌜Eig. in (VI')⌟, und damit auch $n+1 \in Y$. Es folgt $Y = \mathbb{N}_0$ ⌜(VI) bzw. (v) auf Y angewandt⌟.
Da $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{N}_0$ folgt $X = \mathbb{N}_0$.

<u>Zu (VI') ⇒ (M):</u> ⌜durch Widerspruch⌟

Sei $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}_0$ eine nichtleere Menge, die <u>kein</u> kleinstes Element hat. Setze $Y := \mathbb{N}_0 \setminus X$.
Da 0 die kleinste nat. Zahl ist, folgt $0 \in Y$ ⌜denn $0 \notin X$⌟.
Wenn $\forall m < n : m \in Y$, so ist $n \notin X$, denn sonst wäre n das kleinste Element von X.
Also gilt $n \in Y$. Nach (VI'), auf Y angewandt, folgt $Y = \mathbb{N}_0$ und damit $X = \emptyset$ ↯.

<u>Zu (M) ⇒ (VI):</u> ⌜durch Widerspruch⌟ Ist $X \subseteq \mathbb{N}_0$ eine Menge, die die Eigenschaften in (V) ⌜d.h. (VI)⌟ erfüllt, setze $Y := \mathbb{N}_0 \setminus X$. Sei $Y \neq \emptyset$, dann gibt es laut (M) ein kleinstes Element $y \in Y$. Da $0 \in X$, ist $y > 0$. Folglich ist $y-1 \in X$, nach der Eigenschaft in (V) aber auch $y = (y-1)+1 \in X$, wir erhalten einen Widerspruch zu $X \cap Y = \emptyset$.
Deswegen ist doch $Y = \emptyset$, also $X = \mathbb{N}_0$. □

<u>Bem.:</u> Ebenso wie (V) ⇔ (VI) lässt sich eine Formulierung von (VI') finden, die zu Aussagen passt wie folgt:

$$\forall A(x) \text{ Aussage/Prädikat in } x: \; A(0) \wedge \left(\forall n \in \mathbb{N}_0 : (\forall m \in \mathbb{N}_0, m < n : A(m)) \Rightarrow A(n)\right) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : A(n)$$

Diese Variante kommt etwa in mehrgliedrigen Rekursionen wie z.B. bei der Fibonacci-Folge (einer zweigliedrigen Rekursion $n-1, n \rightsquigarrow n+1$) zum Einsatz, wo die Richtigkeit der zu beweisenden Aussage/Formel nicht nur für n, sondern mehrere Vorgänger im Induktionsschritt angenommen werden muss. Für den Induktionsanfang müssen dann auch mehrere Startwerte überprüft werden.

3. <u>Bsp.:</u> Für die Folge $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ der Fibonacci-Zahlen gilt $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\gamma^n - \gamma_0^n)$, wo $\gamma := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\gamma_0 := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

<u>Bew.</u> (durch vollständige Induktion):
Ind.anfang: Für $n=0$ ist $f_0 = 0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\gamma^0 - \gamma_0^0)$ wahr, für $n=1$ ist $f_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ wahr.
Ind.schritt $n-1, n \rightsquigarrow n+1$: Sei die Formel wahr für $n-1$ und n, dann stimmt sie auch für $n+1$, weil gilt:

$$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\gamma^{n-1} - \gamma_0^{n-1} + \gamma^n - \gamma_0^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\gamma^{n-1}\underbrace{(1+\gamma)}_{=\gamma^2} - \gamma_0^{n-1}\underbrace{(1+\gamma_0)}_{=\gamma_0^2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\gamma^{n+1} - \gamma_0^{n+1}\right),$$

denn Nachrechnen zeigt: $\gamma^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\gamma$

und analog: $\gamma_0^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1+\gamma_0$. □