LG7

-1-

Vorlesung "Logische Grundlagen"

LG7: Abbildungen / Funktionen

Stichworte: Def. Abbildung als Relation, Bild einer Teilmenge, Urbild einer Teilmenge, Abbildungstypen: surjektiv/injektiv/bijektiv, Komposition und (Rechts-/Links-) inverse Abb., Sym(X), besondere Abb.: charakteristische Abb., Folgen, Abbildungen bei Quotientenmengen

---

§1: Abbildungen

Bisher hatten wir nur zweistellige Relationen $R \subseteq X \times X$ mit einer Menge X näher untersucht, wenn Vergleiche zweier Elemente von X interessant sind.
Wir möchten nun auch Relationen $R \subseteq X \times Y$ mit zwei unterschiedlichen Mengen untersuchen, also Elemente von X mit denen von Y "vergleichen", z.B. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $R \subseteq \{\text{Geraden}\} \times \{\text{Vektoren}\}$, $R \subseteq \{\text{Äpfel}\} \times \{\text{Birnen}\}, \ldots$
Wenn die beiden Mengen sehr unterschiedlich sind, würde man eher nicht mehr von "Vergleich", sondern von "Zuordnung" sprechen, so dass man auf diesem Wege zum Begriff der Abbildung kommt. Relationen stellen i.a. keine eindeutigen Beziehungen zwischen Mengen her, d.h. einem Element in X können durchaus mehrere Elemente aus Y zugeordnet sein.
Von einer Abbildung wird verlangt, dass sie die <u>ganze</u> Menge X <u>eindeutig</u> in die andere Menge Y abbilden: Jedem $x \in X$ wird genau ein $y \in Y$ zugeordnet.

<u>Def.</u>: Eine linkstotale (1), rechtseindeutige (5) Relation $f \subseteq X \times Y$ heißt **Abbildung** (auch: **Funktion**, kurz: Abb./Fkt.).

[vgl. LG5: f <u>linkstotal</u> $:\Leftrightarrow \forall x \in X \; \exists y \in Y: x f y$

f <u>rechtseindeutig</u> $:\Leftrightarrow \forall x \in X \; \underbrace{\forall y \in Y \; \forall v \in Y: x f y \wedge x f v \Rightarrow y = v}$

beides: $\exists!\, y \in Y: x f y$

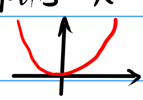
<u>Notation</u>: Statt $x f y$ bzw. $(x,y) \in f$ schreibt man auch $x \mapsto y$ oder $x \mapsto f(x)$ mit $f(x) = y$. Statt $f \subseteq X \times Y$ wird $f: X \to Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$ geschrieben.

Bem.: Eine Abbildung ist – als Menge – dasselbe wie ihr Graph/Schaubild. Diese Def. mit Mengen muss man sich nicht merken, vielmehr ist ihre Eigenschaft wichtig, dass jedem $x \in X$ ein zugehöriges $y \in Y$ eindeutig zugeordnet wird. Die Bezeichnung $f(x)$ macht die Abhängigkeit des Elements $y = f(x)$ von x deutlich.

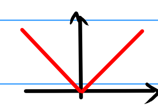
Def.: In einer Abb. $f: X \to Y$ heißt die Menge X der Definitionsbereich bzw. Definitionsmenge und die Menge Y der Zielbereich/Wertebereich/Bildbereich bzw. Zielmenge/Wertemenge/Bildmenge [Letzteres wegen Verwechslungsgefahr nicht so gerne, zu "Bild"/"Bildmenge" s.u.].
Die Menge $f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ heißt Graph von f. ("Schaubild")

Bem.: • Eine Abb. wird durch 3 Angaben festgelegt: Def.bereich/Zielbereich/Abb.vorschrift.
Zwei Abbildungen $f, g: X \to Y$ heißen gleich, falls $\forall x \in X: f(x) = g(x)$.
• Eine Abb. $g: U \to Y$ heißt Einschränkung von $f: X \to Y$, falls $U \subseteq X$ und $g(u) = f(u)$ für alle $u \in U$.
Notation: $g = f_{|U}$. $g: V \to Y$ heißt Fortsetzung von $f: X \to Y$, falls $X \subseteq V$ und $f = g_{|X}$.

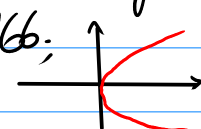
Bsp.: 1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ Standardparabel



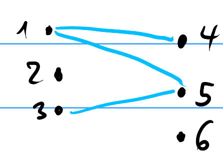
2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$ Absolutbetrag



3. $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist keine Abb., nur eine rechtseindeutige, linkstotale Relation

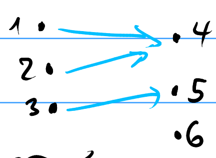


4. $R \subseteq \{1,2,3\} \times \{4,5,6\}$, $f: \{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$



$1R4$
$1R5$
$3R5$

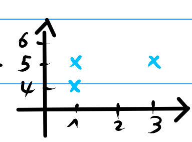
R ist Relation, keine Fkt.



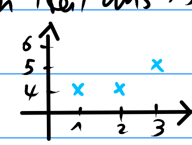
$f(1) = 4 = f(2)$, $f(3) = 5$

von jedem El. des Def.bereichs geht genau ein Pfeil aus $\rightsquigarrow$ f ist Abb.

Graph/Schaubild: R:



f:



Def.: Wenn $y = f(x)$ gilt, so heißt y das Bild von x und x das Urbild von y.

Bem.: Jedes x hat genau ein Bild, nämlich $f(x)$. Aber ein $y \in Y$ kann kein, ein oder mehrere Urbilder haben. Das Konzept "Bild"/"Urbild" lässt sich wie folgt auf Teilmengen von X bzw. Y übertragen:

Def.: Ist $A \subseteq X$, so heißt $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq Y$ das Bild von A,
ist $B \subseteq Y$, so heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) = b\} \subseteq X$ das Urbild von B.

Bem./Zusatz:
- $f^{-1}(B)$ ist ein reines Symbol, mit f^{-1} ist keine Abb. gemeint.
- Ist $A = X$, so heißt $f(X)$ das Bild von X unter f bzw. Bild von f.
- Ist $B = Y$, so heißt $f^{-1}(Y)$ das Urbild von X unter f bzw. Urbild von f.
- Für $x \in X$ ist $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ einelementig, für $y \in Y$ kann $f^{-1}(\{y\})$ aber aus keinem, einem oder mehreren Elementen bestehen.
  Man schreibt einfacher auch $f^{-1}(y)$ für $f^{-1}(\{y\})$.

Bsp.: Für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(u,v) = u + v$ ist $f^{-1}(z) = \{(u,v) \mid u + v = z\} = \{(u, z-u) \mid u \in \mathbb{R}\}$

eigentlich: $f((u,v))$, lassen überflüssige Klammern weg wenn Kontext klar...

$\leadsto$ Alle Punkte einer Geraden $g: y = -x + z$ werden von f auf den y-Achsenabschnitt z abgebildet.

§2: Abbildungstypen

Def.: Eine Abb. $f: X \to Y$ heißt
- injektiv, falls es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein x gibt mit $f(x) = y$
  $\ulcorner \forall y \in Y \ \forall x_1, x_2 \in X: f(x_1) = y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  bzw. $\forall y \in Y$: $f^{-1}(y)$ ist höchstens einelementig $\lrcorner$
- surjektiv, falls es zu jedem $y \in Y$ mindestens ein x gibt mit $f(x) = y$
  $\ulcorner \forall y \in Y \ \exists x \in X: f(x) = y$
  bzw. $\forall y \in Y$: $f^{-1}(y)$ ist mindestens einelementig $\lrcorner$
- bijektiv, falls es zu jedem $y \in Y$ genau ein x gibt mit $f(x) = y$
  $\ulcorner \forall y \in Y \ \exists!\, x \in X: f(x) = y$
  bzw. $\forall y \in Y$: $f^{-1}(y)$ ist einelementig $\lrcorner$

Somit: bijektiv $\Leftrightarrow$ injektiv $\wedge$ surjektiv

Bsp.:

Betr. Abb.:	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f(x) = x^2$
injektiv, nicht surj.:	$f(x) = e^x$	$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$
surjektiv, nicht inj.:	$f(x) = x^3 - x$	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
nicht inj., nicht surj.:	$f(x) = x^2$	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
bijektiv:	$f(x) = x^3$	$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

§3: Komposition und Inverse von Abbildungen

Def.: Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abbildungen.
Dann heißt $g \circ f: X \to Z$, $g \circ f(x) := g(f(x))$ die Komposition / Hintereinanderausführung von f und g.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Lies: "g nach f" für $g \circ f$, man beachte die Reihenfolge!
("g nach f" heißt: erst f, dann g anwenden...)

Def.: Auf jeder Menge X $(\neq \emptyset)$ kann die Identität(sabb.) / identische Abb. definiert werden durch $id_X: X \to X$, $x \mapsto x$.

Bem.:
- Für jede Abb. $f: X \to Y$ gilt $id_Y \circ f = f$ und $f \circ id_X = f$.
  $\rightsquigarrow$ "neutrale" Abbildungen id_X, id_Y bzgl. $\circ$
- Klar gilt i.a. $f \circ g \neq g \circ f$, auch wenn $f, g: X \to X$, z.B. $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x+1$
  $\rightsquigarrow f(g(1)) = f(2) = 4 \neq 2 = g(1) = g(f(1))$.

Def.: Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to X$ Abbildungen zwischen Mengen X und Y.
Dann heißt g eine
- Rechtsinverse von f, falls $f \circ g = id_Y$
- Linksinverse von f, falls $g \circ f = id_X$
- Inverse von f, falls $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$, d.h. falls g sowohl Links- als auch Rechtsinverse von f ist.

(Gelegentlich auch Umkehrabb. von f genannt.)

Wir zeigen, dass diese Begriffe eng mit obigen Abbildungstypen zusammenhängen.

Lemma A: Sei $f: X \to Y$ eine Abb. Dann sind äquivalent: (i) f ist injektiv
(ii) f hat eine Linksinverse

⌈Merkregel: **in**jektiv $\Leftrightarrow$ L**in**ksinverse⌋

Beweis: Zu (i) $\Rightarrow$ (ii): Wähle $z \in X$ bel. Wir def. $g: Y \to X$ durch

$$g(y) := \begin{cases} x, & \text{falls } f(x) = y \text{ gilt,} \\ z, & \text{falls es kein } x \text{ mit } f(x) = y \text{ gibt.} \end{cases}$$

Da es zu jedem $y \in Y$ nach Annahme "injektiv" höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt, können wir g so definieren. Für ein bel. $x \in X$ gilt dann $g(f(x)) = x$, also $g \circ f = id_X$.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei g eine Linksinverse. Angenommen, $u, v \in X$ mit $u \neq v$. Dann gilt $g(f(u)) = u \neq v = g(f(v))$, also folgt $f(u) \neq f(v)$. Dies zeigt, dass f injektiv. $\square$

Analog gilt (muss aber anders bewiesen werden):

__Lemma B:__ Sei $f: X \to Y$ eine Abb. Dann sind äquivalent: (i) f ist surjektiv
(ii) f hat eine Rechtsinverse

⌜Merkregel: surjektiv ⟺ rechtsinverse⌟

__Beweis:__ __Zu (i)⇒(ii):__ Sei f surjektiv, zu jedem $y \in Y$ gibt es dann mind. ein $x \in X$ mit $f(x)=y$. Wir wählen zu jedem y ein solches x aus und setzen $g(y)=x$. Dann gilt nach Konstruktion $f(g(y)) = f(x) = y$, also ist g Rechtsinverse.
__Zu (ii)⇒(i):__ Sei g eine Rechtsinverse. Für jedes $y \in Y$ gilt dann $f(g(y)) = f\circ g(y) = y$, also hat $g(y)$ als Bild (unter f) genau das Element y, d.h. y hat mind. ein Urbild. □

__Bem.:__ Lemma B ist tiefer, als es aussieht: Zum Beweis von (i)⇒(ii) haben wir zu jedem $y \in Y$ ein Urbild "ausgewählt". Dass man das tun kann, ist nicht selbstverständlich, aber ein wichtiges Prinzip der Mengenlehre, nämlich das sogenannte "Auswahlaxiom" (tatsächlich ist Lemma B dazu äquivalent; später mehr dazu).

Wir fassen Lemma A und B zusammen:

__Lemma C:__ Sei $f: X \to Y$ eine Abb. Wenn f eine Linksinverse $g: Y \to X$ und eine Rechtsinverse $h: Y \to X$ hat, dann ist $g = h$ und f ist bijektiv.

__Beweis:__ Nach Voraussetzung gilt $f\circ h = id_Y$ und $g\circ f = id_X$, also folgt
$$g(y) = g(f\circ h(y)) = g(f(h(y))) = g\circ f(h(y)) = h(y) \text{ für alle } y \in Y. \text{ Also ist } g = h.$$ □

__Korollar:__ Eine bijektive Abb. $f: X \to Y$ hat genau eine Inverse.

__Beweis:__ Seien g und h Inverse von f. Dann ist insb. g Rechtsinverse von f und h Linksinverse von f, nach Lemma C folgt $g = h$. □

__Bsp.:__
- $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist bij., die Inverse heißt $\log: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ (Logarithmus), es gilt $\exp(\log(x)) = x$ bzw. $\log(\exp(y)) = y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$.
- $q: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ ist bij., die Inverse heißt $\sqrt{\ }: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (Wurzel), d.h. $\sqrt{y}$ ist eine Zahl ≥ 0 mit $(\sqrt{y})^2 = q\circ\sqrt{\ }(y) = y = \sqrt{\ }\circ q(y) = \sqrt{y^2}$, sofern $y \geq 0$ ist.
- $\tilde{q}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ ist surj., die Rechtsinverse ist $\tilde{\sqrt{\ }}: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, es gilt $\tilde{q}\circ\tilde{\sqrt{\ }}(y) = (\tilde{\sqrt{y}})^2 = y$.

identifizieren $\tilde{\sqrt{\ }}$ mit $\sqrt{\ }$, wollen mal nicht so pingelig sein

- $p_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^n$ ist bij., die Inverse ist (per Def.) die n-te Wurzel $\sqrt[n]{\ }$.

Die bijektiven Abbildungen einer Menge auf sich haben mit "$\circ$" eine besondere Struktur:

Def.: Sei X eine nichtleere Menge. Eine bijektive Abb. $f: X \to X$ heißt auch Permutation von X. Die Menge aller Permutation bezeichnet man als $\mathrm{Sym}(X)$, d.h.

$$\mathrm{Sym}(X) := \{ f: X \to X \mid f \text{ ist bijektiv} \}.$$

Bem.:
- Sind $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$, so ist auch $f \circ g \in \mathrm{Sym}(X)$ (und ebenso $g \circ f \in \mathrm{Sym}(X)$), da die Komposition bijektiver Abb.en wieder bijektiv ist.
- Weiter ist $id_X \in \mathrm{Sym}(X)$ und haben $f \circ id_X = f = id_X \circ f$ für jedes $f \in \mathrm{Sym}(X)$.
- Zu jedem $f \in \mathrm{Sym}(X)$ gibt es eine inverse Abb., d.h. ein $g \in \mathrm{Sym}(X)$ mit
  $f \circ g = id_X = g \circ f$ (s. Korollar für $\mathrm{Sym}(X)$).

$\rightsquigarrow$ Tazit: $\mathrm{Sym}(X)$ erfüllt mit $\circ$ die Axiome einer Gruppe $(G, \circ)$, d.h.

(i) Assoziativität: $\forall f, g, h \in G: (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ ← bei $\mathrm{Sym}(X)$ etwas mühsam zu zeigen, aber nicht schwer)

(ii) Ex. eines neutr. El.: $\exists e \in G \; \forall f \in G: e \circ f = f = f \circ e$

(iii) Ex. von inversen El.: $\forall f \in G \; \exists g \in G: g \circ f = e = f \circ g$

Bem.:
- Da $(\mathrm{Sym}(X), \circ)$ eine Gruppe ist, heißt $\mathrm{Sym}(X)$ auch symmetrische Gruppe von X. Im Gegensatz zu den üblichen Zahlenbereich-Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, gibt $\mathrm{Sym}(X)$ das wichtigste Bsp. für eine nicht kommutative / nicht abelsche Gruppe.
  (Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt abelsch / kommutativ, falls $\forall f, g \in G: f \circ g = g \circ f$.)
- Haben hier für eine allgemeine Verknüpfung $\circ: G \times G \to G$ auch "$\circ$" geschrieben, man könnte auch $*$ oder andere Symbole schreiben $(+, \cdot, \times, \dots)$, die in anderen Zusammenhängen aber meist eine speziellere Bedeutung haben.
- Wir nennen eine bel. Abb. $*: X \times X \to X$ für eine nichtleere Menge X eine Verknüpfung.
- Es ist üblich, eine Gruppe als ein Paar $(G, \circ)$ zu schreiben, d.h. durch Angabe der Menge G und der Verknüpfung $\circ$. Manchmal schreibt man auch $(G, \circ, e)$, wenn das neutrale Element e genannt werden soll (es ist übrigens eindeutig bestimmt).
- Mit g^2 ist $g \circ g$ gemeint. Def. rekursiv: $g^{n+1} := g^n \circ g$, $g^0 := e$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Bsp.: Betr. $X = \{1, 2, 3\}$, neben id_X gibt es die Abb. $T_1: \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases}$, $T_2: \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}$, $T_3: \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases}$

und $D_1: \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}$ und $D_2: \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases}$ es ist $\mathrm{Sym}(X) = \{ id_X, T_1, T_2, T_3, D_1, D_2 \}$.

Haben: $D_1 \circ D_2 = id_X = D_2 \circ D_1$, $T_1^2 = T_2^2 = T_3^2 = id_X$, weiter $T_1 \circ D_1 = T_3$ usw.

§4: Besondere Abbildungen

4.1. Charakteristische Abbildungen

Def.: Ist X eine Menge und $A \subseteq X$, so def. wir eine zugehörige Abb. durch

$$\chi_A : X \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Man nennt χ_A die charakteristische Funktion von A. Klar: $\chi_A = \chi_B \Leftrightarrow A = B$.

Bem.: Ist umgekehrt eine Abb. $f: X \to \{0,1\}$ geg., so ist $f = \chi_A$ mit $A := \{x \in X \mid f(x) = 1\}$, d.h. jede 0-1-Abb. ist eine charakterische Fkt.

4.2. Folgen

Def.:
- Eine Abb. $x: \mathbb{N} \to X$ in eine Menge X heißt Folge und wird als $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geschrieben, d.h. schreiben x_n für $x(n)$.
- $\mathbb{N}$ heißt Indexmenge der Folge.

Bem.:
- Für $X = \mathbb{R}$ hat man die in der Analysis gebräuchlichen reellen Zahlenfolgen, mit deren Hilfe man die Approximation an andere reelle Zahlen untersucht ("Konvergenz").
- Natürlich können auch Folgen von Folgen etc. untersucht werden.
- Für Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}_0$ kann die zugehörige charakteristische Fkt. als zugehörige 0-1-Folge (d.h. Abb. $\mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$) aufgefasst werden und umgekehrt.

4.3. Abbildungen bei Quotientenmengen

Sei X eine nichtleere Menge und $\sim$ eine Ä-Relation. Die Quotientenmenge ist $X/{\sim} = \{[x] \mid x \in X\}$, die Menge der Ä-Klassen $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$.

Es gibt immer eine "natürliche" Abb. $k: X \to X/{\sim}$, $x \mapsto [x]$, die jedem x ihre Klasse $[x]$ zuordnet, oft auch kanonische Abb. genannt (sie ist übrigens surjektiv).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & Y \\ X/{\sim} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

ein solches Schaubild heißt "kommutatives Diagramm"

falls $f = \tilde{f} \circ k$

Ist eine Abb. $f: X \to Y$ derart, dass sie konstant auf den Klassen $[x]$ ist, d.h. $\forall x \in X\ \forall y,z \in [x]: f(y) = f(z)$, dann gibt es eine Abb. $\tilde{f}: X/{\sim} \to Y$, die sich auf den $[x]$ wie f verhält ("von f induziert wird"), d.h. für die $f = \tilde{f} \circ k$ gilt: Es ist einfach $\tilde{f}([x]) := f(x)$ erklärt. Diese Def. ist wohldefiniert (d.h. auch hier repräsentantenunabh.) nach Vor.

Bsp.: $X = \mathbb{Z}$, $m \sim n :\Leftrightarrow 3 \mid m - n$, $\mathbb{Z}/{\sim} = \{[0],[1],[2]\}$. Die Abb. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $f(n) := e^{\frac{2\pi i n}{3}}$ induziert $\tilde{f}: \mathbb{Z}/{\sim} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}([0]) = 1$, $\tilde{f}([1]) = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\tilde{f}([2]) = e^{\frac{4\pi i}{3}}$.