Vorlesung "Logische Grundlagen"

LG8: Endliche Mengen

Stichworte: endliche Menge, Kardinalität $\# X = n$, Ergebnisse über endliche Mengen
Kombinatorik, Permutationen, $\binom{n}{k}$, Binomialsatz, Multinomialsatz,
Potenzreihen als kombinatorisches Hilfsmittel

---

§1: Endliche Mengen und ihre Kardinalität

Def.: • Eine Menge X heißt endlich, wenn es eine nat. Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ und eine bijektive Abbildung $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to X$ gibt.
Dann gilt $X = \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$ und $f(i) \neq f(j)$ für $i \neq j$.
• Die Zahl n heißt dann Kardinalität / Mächtigkeit / Länge von X.
Notation: $\# X = n$ (oder $|X| = n$ oder $\operatorname{card}(X) = n$)

Bem.: • Es gilt: $\# X = 0 \iff X = \emptyset$.
• Eine Menge X heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist, vgl. LG9.

Man kann den Kardinalitätsbegriff verallgemeinern zu beliebigen Mengen:

Def.: Zwei Mengen X, Y haben dieselbe Mächtigkeit / Kardinalität, wenn es eine bijektive Abbildung $f: X \to Y$ gibt.

Wir zeigen einige Ergebnisse über endliche Mengen (die für unendliche Mengen i.a. falsch sind):

Lemma A: Es seien X und Y endliche Mengen und $f: X \to Y$ eine surjektive Abb. Wenn $\# X \leq \# Y$ gilt,
dann ist f bijektiv und es gilt $\# X = \# Y$.

Bew.: Setze $m = \# X$ und $n = \# Y$, $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Dann nimmt f höchstens m verschiedene Werte an, nämlich $f(x_1), \ldots, f(x_m)$. Nach Vor. gilt $Y = \{f(x_1), \ldots, f(x_m)\}$, also ist $m \geq n$. Wegen der Vor. $m \leq n$ folgt $m = n$. Würde f einen Wert mehrfach annehmen, wäre $m > n$, im $\lightning$ zu $m = n$. Also ist f injektiv und damit bijektiv. $\square$

Lemma B: Es seien X und Y endliche Mengen und $f: X \to Y$ eine injektive Abb. Wenn $\# X \geq \# Y$ gilt, dann ist f bijektiv und es gilt $\# X = \# Y$.

Bew.: Setze $m = \# X$ und $n = \# Y$, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$. Da f injektiv ist, hat $\{f(x_1), \dots, f(x_m)\}$ genau m Elemente. Sie liegt in Y, also ist $m \leq n$. Wegen der Vor. $m \geq n$ folgt $m = n$ und $Y = \{f(x_1), \dots, f(x_m)\}$, d.h. f ist surjektiv. □

Korollar: Es seien X und Y endliche Mengen mit $\# X = \# Y$ und sei $f: X \to Y$ eine Abb. Dann sind äquivalent:
(i) f ist bijektiv
(ii) f ist injektiv
(iii) f ist surjektiv.

Bem.: Ein Bsp., warum dies für unendliche Mengen i.a. falsch ist:

- Sei $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ $\rightsquigarrow f$ ist surjektiv, aber nicht injektiv, da $f(0) = 0 = f(1)$.
- Sei $g: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $g(x) = 2x$ $\rightsquigarrow g$ ist injektiv, aber nicht surjektiv, da $\neg \exists x \in \mathbb{N}_0 : g(x) = 1$.

Wir beschäftigen uns jetzt in LG8 noch mit der Möglichkeit, Elemente endlicher Mengen in Reihenfolgen zu bringen, z.B. die Reihenfolge von Zahlen in einem n-Tupel. Mit solchen Fragestellungen beschäftigt sich die Kombinatorik, die vielfältige Anwendungen hat, speziell auch in der Spieltheorie / Statistik / Wahrscheinlichkeitstheorie bzw. "Unterhaltungsmathematik". Sie ist auch eng verbunden mit der Graphentheorie und Zahlentheorie.

§2: Permutationen endlicher Mengen

Def.: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $S_n := \mathrm{Sym}(\{1, 2, \dots, n\}) = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \mid \sigma \text{ bijektiv}\}$ die symmetrische Gruppe von $\{1, \dots, n\}$.

Die Elemente von S_n heißen Permutationen (von $\{1, \dots, n\}$).

Bsp.: $S_2 = \{ id_{\{1,2\}}, \tau \}$ mit $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 1$.

- Ist X eine endliche Menge mit $\#X = n$, dann ist $\mathrm{Sym}(X)$ als Gruppe isomorph zu S_n, denn mit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ (bei irgendeiner Reihenfolge der El. von X) ist durch $T: S_n \to \mathrm{Sym}(X)$, $k \mapsto x_k$ für $k \in \{1, \dots, n\}$ ein (Gruppen-) isomorphismus gegeben, d.h. T ist bijektiv, $\forall \sigma, \tau \in S_n: T(\sigma \circ \tau) = T(\sigma) \circ T(\tau)$
- Somit: Um $\mathrm{Sym}(X)$ einer Menge X mit $\#X = n$ zu untersuchen, reicht es, S_n zu untersuchen. Ergebnisse über die Gruppenstruktur von S_n übertragen sich dann zu solchen über die von $\mathrm{Sym}(X)$.

<u>Bem:</u> <u>Jede</u> Gruppe der Ordnung n ist zu einer Untergruppe von S_n isomorph (Satz von Cayley: $G = \{a_1, \dots, a_n\} \rightsquigarrow$ jedem a_i kann man eind. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_i * a_1 & a_i * a_2 & \dots & a_i * a_n \end{pmatrix} \in S_n$ zuordnen). Zur Gruppentheorie "reicht" also das Studium der S_n...

1. <u>Satz:</u> $\forall n \in \mathbb{N}: \#S_n = n! \; (= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)$.

<u>Bew.:</u> Nach obigem Kor. genügt es, die Anzahl der <u>injektiven</u> Abbildungen $\sigma: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ zu bestimmen. Für den Wert $\sigma(1)$ gibt es n Möglichkeiten. Da σ injektiv sein soll, bleiben für $\sigma(2)$ noch $n-1$ Möglichkeiten, für $\sigma(3)$ dann noch $n-2$ Möglichkeiten, ..., für $\sigma(n)$ noch 1 Möglichkeit (gehen also induktiv vor). Insgesamt haben wir $n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ viele Möglichkeiten, eine injektive Abb. anzugeben. □

<u>Bsp.:</u>
- S_3 hat 6 Elemente, s. LG 7 auf S. 6 unten. Letztlich bedeutet dies, dass man 6 Möglichkeiten hat, die drei Zahlen 1, 2, 3 bzw. die drei Buchstaben a, b, c in eine Reihenfolge zu bringen:

1 2 3	2 1 3	3 1 2	lexikographisch angeordnet
1 3 2	2 3 1	3 2 1	

- Entsprechend ist $n!$ die Anzahl der möglichen Reihenfolgen von $1, 2, \dots, n$.

<u>Bem.:</u> Eine Permutation $\sigma \in S_n$ kann man schreiben als
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, d.h. z. B. die Abb. $\sigma \in S_3$ mit $\sigma: \begin{matrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{matrix}$ ist $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Noch kompakter ist die <u>Zykelschreibweise</u>:

$\tau = (1\,2)\,(3\,7\,5)\,(6\,8\,9)$ ist $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \boxed{4} & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & \boxed{4} & 3 & 8 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix} \in S_9$ Fixpunkt

$\rightsquigarrow$ obiges σ ist $\sigma = (1\;3\;2)$

Ü Berechnen Sie τ^{-1} und τ^6 in S_9.

Tipp: 1. Zeilen vertauschen und neuordnen, 2. Potenzen von Zyklen untersuchen.

2. **Satz:** Eine n-elementige Menge hat 2^n Teilmengen. Kurz: $\#X = n \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$.

Bew.: (Vollst. Ind.) $n=0$: Ist $X=\emptyset$, so ist $\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$ einelementig, d.h. $\#\mathcal{P}(\emptyset)=1=2^0$. ✓

$n \rightsquigarrow n+1$: Sei $\#X = n+1$ und $x \in X$. Dann ist $\mathcal{P}(X) = \{T \subseteq X \mid x \in T\} \cup \{T \subseteq X \mid x \notin T\}$ disjunkte Vereinigung zweier Mengen aus je 2^n vielen Elementen nach Ind. vor., also ist $\#\mathcal{P}(X) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. $\square$

Bem.: Aufgrund des 2. Satzes schreibt man manchmal auch 2^X für die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X.

3. **Satz:** Eine n-elementige Menge besitzt $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen mit $0 \le k \le n \in \mathbb{N}_0$.

Bem.: Die Zahl $\binom{n}{k}$ heißt Binomialkoeffizient (da sie als Koeffizient in der allgemeinen binomischen Formel $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ erscheint). Sie ist rekursiv definiert über
$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für $1 \le k \le n$.
(Eine vollst. Ind. zeigt die Formel $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.)

Bew.: (Vollst. Ind.) Für $n=0$ ist bei $X=\emptyset$ nichts zu zeigen, haben $\binom{0}{0}=1$.

$n \rightsquigarrow n+1$: Sei $\#X = n+1$, etwa $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ und $0 \le k \le n+1$.

Zu zeigen: X hat $\binom{n+1}{k}$ viele (verschiedene) k-elementige Teilmengen.

Für $k=0$ (Teilmenge $\emptyset$) oder $k=n+1$ (Teilmenge X) ist dies wegen $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ richtig, sei also $1 \le k \le n$.

Haben wieder $\{T \subseteq X \mid \#T = k\} = \{T \subseteq X \mid x_0 \in T, \#T = k\} \cup \underbrace{\{T \subseteq X \mid x_0 \notin T, \#T = k\}}_{= \{T \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\} \mid \#T = k\},}$ als disjunkte Vereinigung.

hat $\binom{n}{k}$ viele Elemente nach Ind. vor.

Da
$$\{T \subseteq X \mid x_0 \in T, \#T = k\} \to \{T' \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\} \mid \#T' = k-1\}$$
$$T \mapsto T \setminus \{x_0\}$$
eine bijektive Abb. ist, haben beide Mengen gleich viele Elemente, nach Induktionsvoraussetzung nämlich $\binom{n}{k-1}$ viele.

Insgesamt hat $\{T \subseteq X \mid \#T = k\}$ also $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ viele Elemente. $\square$

Der 2. und 3. Satz zusammen zeigt, dass $2^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ gilt.

Bem.: Der 3. Satz liefert eine kombinatorische Deutung der Binomialkoeffizienten. Mit dieser kann der allgemeine binomische Satz bewiesen werden wie folgt:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdots(x+y)}_{n\text{-mal}} = \sum_{\substack{Z\subseteq\{1,\ldots,n\}}} x^{\#Z}y^{n-\#Z} = \sum_{k=0}^{n}\underbrace{\sum_{\substack{Z\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ \#Z=k}} 1}_{=\binom{n}{k}\text{ laut 3. Satz}}\cdot x^k y^{n-k}.$$

↑ mögliche Auswahl von Faktoren im Produkt $(x+y)\cdots(x+y)$, wo Summand "x" zum Ausmultiplizieren genommen wird

4. Satz: Sei X mit $\#X=n$ und $k_1,\ldots,k_r\in\mathbb{N}_0$ mit $k_1+k_2+\ldots+k_r=n$.
Dann gibt es genau $\frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}$ Abbildungen $f: X\to\{1,\ldots,r\}$, die jedes i genau k_i mal als Wert annehmen, in Formeln:

$$\frac{n!}{k_1!\cdots k_r!} = \#\{f: X\to\{1,\ldots,r\} \mid \#f^{-1}(i)=k_i \text{ für } i=1,\ldots,r\}.$$

[ohne Bew., wäre nicht schwer]

Korollar: Die multinomische Formel / der Multinomialsatz: ("r-nomische Satz")

$$(x_1+\ldots+x_r)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_r\in\mathbb{N}_0\\ \text{mit } k_1+\ldots+k_r=n}} \frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}\, x_1^{k_1}\cdots x_r^{k_r}.$$

Bew.: $$(x_1+\ldots+x_r)^n = \sum_{f:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,r\}} x_1^{\#f^{-1}(1)}\cdots x_r^{\#f^{-1}(r)} = \sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_r\in\mathbb{N}_0\\ \text{mit } k_1+\ldots+k_r=n}} \underbrace{\sum_{\substack{f:\ldots\\ \#f^{-1}(i)=k_i}} 1}_{=\frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}\text{ laut 4. Satz}}\cdot x_1^{k_1}\cdots x_r^{k_r}.$$

Bem.: Die kombinatorische Interpretation der Koeff. im r-nomischen Satz kann bei Kombinatorikproblemen helfen, sogesehen können Polynome / Potenzreihen ein kombinatorisches Werkzeug sein, Bsp.: Wieviele Möglichkeiten gibt es, einen Euro in Kleingeldmünzen (1-, 2-, 5-, 10-, 20-, 50-Cent-Münzen) zu wechseln?
Die gesuchte Zahl ist der Koeff. vor x^{100} im Polynom
$\left(\sum_{n=0}^{100}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{50}x^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{20}x^{5n}\right)\left(\sum_{n=0}^{10}x^{10n}\right)\left(\sum_{n=0}^{5}x^{20n}\right)\left(\sum_{n=0}^{2}x^{50n}\right)$ und kann zu 4562 berechnet werden.

Anderes Bsp.: Die Identität $\left(\sum_{n=0}^{9}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{9}x^{10n}\right)\left(\sum_{n=0}^{9}x^{100n}\right)\cdots = \frac{1}{1-x}$ ist äquivalent zu dem Satz, dass jede natürliche Zahl auf genau eine Art im Dezimalsystem geschrieben werden kann.