LG9

Vorlesung "Logische Grundlagen"

LG9: Große Zahlen und unendliche Mengen

Stichworte: große Zahlen, abzählbar unendlich, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig, Lemma von Cantor, überabzählbar, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mathbb{R}$ sind überabzählbar, Cantorsche Diagonalverfahren, Hilberts Hotel

---

§1: Große Zahlen

\#Minuten pro Woche: $7 \cdot 24 \cdot 60 = 10.080 \approx 10^4$

\# Mögl., ein 3x3-TicTacToe-Feld in 3 Farben anzumalen: $3^9 = 19.683 \approx 20.000 = 2 \cdot 10^4$

\# Haare pro Mensch (im Schnitt): $100.000 = 10^5$

\# Stunden in 114 Jahren: $\approx 1.000.000 = 10^6$ (eine Million)

Erdumfang: $40.074 km \approx 4 \cdot 10^7 m$

\# Sandkörner in einem Basketball: $\approx 20.000.000.000 = 2 \cdot 10^{10}$

\# 9-buchstabige Wörter mit 26 Buchstaben a-z: $26^9 \approx 5.43 \cdot 10^{12}$

\# Möglichkeiten, ein Schachbrett schwarz/weiß zu bemalen: $2^{64} \approx 18.5 \cdot 10^{19}$

Avogadro-Konstante (Teilchenzahl in Stoffmenge "1 Mol"): $6.02 \cdot 10^{23}$

\# Atome in der Erde: $\approx 10^{50}$

\# Mögl., 48 Punkte auf irgendeine Art miteinander zu verbinden: $\approx 10^{61}$

\# Atome im beobachtbaren Universum: $\approx 10^{80}$

Zählwörter:

	deutsch	englisch	chinesisch / japanisch	
10^3	Tausend	thousand	10^4	万
10^6	Million	million	10^8	億
10^9	Milliarde	billion	10^{12}	兆
10^{12}	Billion	trillion	⋮	⋮
10^{15}	Billiarde	quadrillion	in 4er Gruppen aufsteigend	
10^{18}	Trillion	quintillion		
10^{21}	Trilliarde	sextillion		
10^{24}	Quadrillion	septillion		
	…	…		

LG9

Sehr große Zahlen:

Die Zahl 10^{100} (10 Sexdezilliarden) heißt auch 1 Googol (engl.); der Firmenname "google" ist davon abgeleitet.

Das beobachtbare Universum mal $10^{20} = 100$ Trillionen hat ≈ 1 Googol Atome.

Mögl., ein 10×10-Quadrat mit 10 Farben zu bemalen: $10^{100} = 1$ Googol

verschiedener QR-Codes (zum Einscannen): $2^{\underbrace{23.648}_{\text{"Bitzahl" laut Hersteller}}} = 10^{23.648\cdot\frac{\log 2}{\log 10}} \approx 10^{7119}$

größte bekannte Primzahl:

$2^{74.207.281} - 1$ mit 22.338.618 vielen Dezimalstellen [vgl. GIMPS]

Exponentialtürme: $10^{10^{100}} = 10^{(10^{100})} = 10^{10^{10^2}}$ (10 hoch 1 Googol)

Skewes-Zahl: $10^{10^{10^{34}}}$ Nach S. Skewes benannt, der 1933 gezeigt hatte, dass $\int_2^x \frac{dt}{\log t} - \pi(x)$ noch vor dieser Zahl einen Vorzeichenwechsel besitzt, $\pi(x) := \#\{p \leq x \mid p \text{ prim}\}$.

Mittlerweile weiß man, dass nahe $1.4\cdot 10^{316}$ ein solcher Vzwechsel stattfindet.

Zur Demonstration verglich G.H. Hardy die Skewes-Zahl mit der Anzahl möglicher Züge (Austausch zweier Atome), würde man mit allen Atomen des Universums Schach spielen.

Mittlerweile spielen auch noch größere Zahlen (bei endlichen Zahlen) eine Rolle in der Mathematik.

§2: Unendlich große Mengen

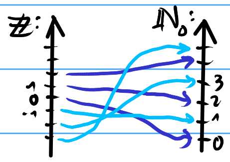
Angesichts dessen, dass die Vorstellungskraft für sehr große Zahlen schnell nachlässt und unser Universum endlich ist, erscheint es merkwürdig, von unendlich großen Mengen überhaupt zu sprechen. Dennoch ist das Konzept sehr nützlich in Anwendungen, wo die Wirklichkeit damit idealisiert und einfach beschrieben werden kann ("Kontinuum", etc....). In der Mathematik akzeptieren wir deswegen unendlich große Mengen auf natürliche Weise.

Das Unendlichkeitsaxiom von ZFC besagt (im wesentlichen), dass $\mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_0$) eine unendlich große Menge ist. Nach Def. heißt dies, dass es für kein $n\in\mathbb{N}$ eine Bijektion $f: \{1,\dots,n\} \to \mathbb{N}$ gibt.

Def.: Eine Menge X heißt abzählbar, wenn es eine injektive Abb. $X \to \mathbb{N}_0$ gibt.
Eine Menge X heißt abzählbar unendlich, wenn X abzählbar und unendlich ist.

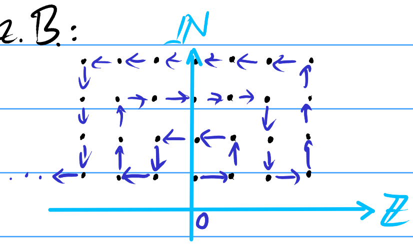
1. **Bsp.:** Unmittelbar klar ist, dass jede endliche Menge abzählbar ist.
Ebenso: $\mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich.

2. **Bsp.:** $\mathbb{Z}$ ist abzählbar (unendlich), denn $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $f(z) := \begin{cases} 2z, & z \geq 0 \\ -(2z+1), & z < 0 \end{cases}$
ist injektiv.



3. **Bsp.:** $\mathbb{Q}$ ist abzählbar: Es gibt (wie im 2. Bsp.) viele Möglichkeiten, eine injektive Abb. $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}_0$ zu konstruieren.
Jeder Bruch $q \in \mathbb{Q}$ lässt sich eindeutig als gekürzten Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ darstellen, daher ist $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $q = \frac{a}{b} \mapsto (a, b)$ injektiv.
Somit muss nur noch eine Bijektion $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ hintergeschaltet werden,

z.B.:



oder:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(0,1) & \to & (0,2) & \nearrow & (0,3) & \to & (0,4) & \ldots \\
(1,1) & \swarrow & (1,2) & \nearrow & (1,3) & \swarrow & (1,4) & \ldots \\
(-1,1) & & (-1,2) & \swarrow & (-1,3) & \nearrow & (-1,4) & \ldots \\
(2,1) & \swarrow & (2,2) & \nearrow & (2,3) & \swarrow & (2,4) & \ldots \\
(-2,1) & & (-2,2) & \swarrow & (-2,3) & \nearrow & (-2,4) & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

(d.h. also: $(0,1) \mapsto 0$, $(0,2) \mapsto 1$, $(1,1) \mapsto 2$, $(-1,1) \mapsto 3, \ldots$)

Letzteres Abzählverfahren ist auch als 1. Cantorsches Diagonalverfahren bekannt.

Fazit: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich und haben daher dieselbe Mächtigkeit, denn:

Lemma: Eine unendliche Menge X ist genau dann abzählbar, wenn es eine bijektive Abb. $g: X \to \mathbb{N}_0$ gibt.

Bew.: „$\Rightarrow$": Wenn es eine solche Abb. g gibt, ist X abzählbar nach Def.
„$\Leftarrow$": Sei X abzählbar, etwa $f: X \to \mathbb{N}_0$ injektiv. Dann ist
$f(X) = \{n_0, n_1, n_2, \ldots\}$ mit $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$, da X unendlich.
Definiere $h: f(X) \to \mathbb{N}_0$, $n_j \mapsto j$. Dann ist $g := h \circ f: X \to \mathbb{N}_0$ bijektiv. $\square$

Def.: Eine Menge M, die nicht abzählbar ist, heißt überabzählbar.

Korollar: Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$, d.h. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) := \{M \subseteq \mathbb{N}\}$, ist überabzählbar.

Bew.: Es kann nach dem Lemma von Cantor (s.u.) keine bijektive Abb. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ geben. Nach dem Lemma folgt die Beh. $\square$

<u>Lemma von Cantor:</u> X Menge $\Rightarrow$ es gibt keine surjektive Abb. $X \to \mathcal{P}(X)$.

<u>Bew.:</u> Sei $f: X \to \mathcal{P}(X)$ eine Abb. Dann ist f nicht surjektiv:

Es gilt: f ordnet jedem $x \in X$ eine Teilmenge $f(x) \in \mathcal{P}(X)$ zu.

Setze $A := \{x \in X;\ x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$.

Dann hat A kein Urbild unter f, d.h. ex. kein $x \in X$ mit $f(x) = A$. [$\Rightarrow f$ nicht surj.]

Denn:
- Für $x \in A$ ist $x \notin f(x)$, also $f(x) \neq A$ weil $x \in A \setminus f(x)$.
- Für $x \in X \setminus A$ ist $x \in f(x)$, also $f(x) \neq A$
  [wäre $f(x) = A$, müsste für $x \in f(x) = A$ dann $x \notin f(x)$ sein, ↯]. □

Damit können wir zeigen, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Somit gibt es (mindestens) zwei "Sorten" von Unendlichkeit, nämlich abzählbar unendlich und überabzählbar.

<u>Satz:</u> $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

<u>Bem.:</u> das Beweisverfahren hier, so oder ähnlich, heißt <u>2. Cantorsches Diagonalverfahren</u>.

<u>Bew.:</u> Ziel: Konstruieren injektive Abb. $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$.

[dies genügt: dann $\mathbb{R}$ überabz'bar, weil $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabz'bar laut Cantor-Lemma.]

Ist $A \subseteq \mathbb{N}$, def. charakteristische Fkt. $\chi_A: \mathbb{N} \to \{0,1\},\ j \mapsto \begin{cases} 1, & j \in A \\ 0, & j \notin A \end{cases}$

Def. Fkt. $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto h(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \chi_A(j) \cdot 10^{-j} = \overbrace{0,\underbrace{\chi_A(1)}\,\underbrace{\chi_A(2)}\ldots}^{\text{Dezimalbruch}}$

mit der Dezimaldarstellung einer reellen Zahl mit 0en und 1en als Nachkommastellen, welche so eind. bestimmt ist.

- Kgz. der Reihe klar wegen $0 \le h(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j} = 0,111\ldots = \frac{1}{9}$,
  Reihe ist monoton wachsend, also kgt.
- Eind. der Darstellung (d.h. Injektivität von h) beweisbar:

$$h(A) = h(B) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \chi_A(j) 10^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_B(j) 10^{-j} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{(\chi_A(j) - \chi_B(j))}_{\in \{-1,0,1\}} \cdot 10^{-j} = 0 \quad (*)$$

<u>Ann.:</u> k minimal mit $\chi_A(k) \neq \chi_B(k)$.

Dann: $10^{-k} = |\chi_A(k) - \chi_B(k)| \cdot 10^{-k} = \left|\sum_{j \ge k+1} (\chi_B(j) - \chi_A(j)) \cdot 10^{-j}\right|$, (aus $(*)$)

aber $|\text{r.S.}| \le \sum_{j \ge k+1} 10^{-j} = 10^{-k-1} \cdot \sum_{j=0} 10^{-j} = 10^{-k-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10^{-k-1} \cdot \frac{10}{9} = 10^{-k} \cdot \frac{1}{9}$, ↯

Also sind alle $\chi_A(k) = \chi_B(k)$, also $A = B$. Also ist h injektiv. □

Bem.: Häufig wird das 2. Cantorsche Diagonalverfahren wie folgt skizziert:
Wäre $\mathbb{R}$ abzählbar, dann auch das Intervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Angenommen, man hätte eine Abzählung dieser reellen Zahlen (ggf. als Dezimalbrüche) wie folgt ($a_{ij} \in \{0,\dots,9\}$):

$\alpha_1 = 0{,}\, a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14} \dots$
$\alpha_2 = 0{,}\, a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24} \dots$
$\alpha_3 = 0{,}\, a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34} \dots$
$\vdots$

Betr. die Zahl $\beta := 0{,}\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \dots$ mit $b_i := \begin{cases} 1, & a_{ii} \neq 1 \\ 2, & a_{ii} = 1 \end{cases}$, dann ist $\beta \neq \alpha_1$ da $b_1 \neq a_{11}$, $\beta \neq \alpha_2$ da $b_2 \neq a_{22}$, ..., also kommt β nicht in der Abzählung vor, ↯. $\square$

§3: Hilberts Hotel

Um die Paradoxie des Begriffes "Unendlichkeit" zu demonstrieren, gab D. Hilbert die folgende bekannte Anekdote [vgl. auch F. Wille, Eine mathematische Reise]:
Hilberts Hotel hat unendlich viele Zimmer 1, 2, 3, 4, ... und ist vollbelegt.

(1.) Ein ankommender zusätzlicher Gast kann untergebracht werden.
(M zusätzliche Gäste können ebenso untergebracht werden.)
Wie?

(2.) Ein Bus mit unendlich vielen Gästen $g_1, g_2, g_3, \dots$ kommt an. Alle Gäste können untergebracht werden. Wie?

(3.) Unendlich viele Busse $b_1, b_2, b_3, \dots$ mit je unendlich vielen Gästen
b_1: $g_{11}, g_{12}, g_{13}, \dots$, b_2: $g_{21}, g_{22}, g_{23}, \dots$, b_3: $g_{31}, g_{32}, g_{33}, \dots$ kommen an, alle Gäste können untergebracht werden.
Wie?

(4.) Ein Schiff mit Gästen, die mit (allen) reellen Zahlen $\in [0,1]$ durchnumeriert sind, kommt am Hafen an. Können alle Gäste im Hotel untergebracht werden? Warum?

(5.) Im Hotel herrscht Rauchverbot. Es dürfen keine Zigaretten mitgebracht werden. Die Gäste wissen sich zu helfen: Gast Nr. 2 gibt Gast Nr. 1 eine Zigarette, Gast Nr. 3 gibt Gast Nr. 2 zwei Zigaretten, Gast Nr. 4 gibt Gast Nr. 3 drei Zigaretten, ... Am Ende hat jeder Gast eine Zigarette. Warum ist dies ein Trugschluss?

Fazit:
- unendliche Teilmengen einer unendlichen Menge sind deshalb nicht unbedingt "kleiner".
- unendliche Mengen werden nicht unbedingt "größer", wenn man sie mit einer disjunkten unendlichen Menge vereinigt