

Notizen zu LG 1

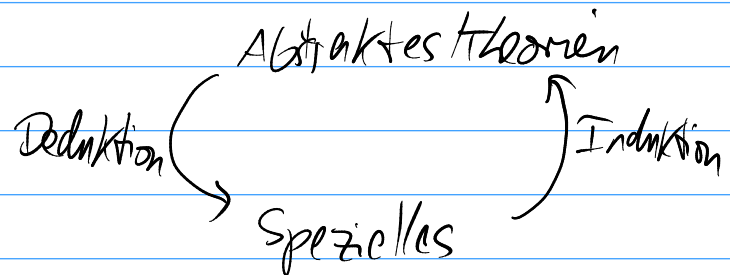
§1: Einstimmung: Zur Sprache der Mathematik

Definition

Axiome

Grundlage für die Mathematik: ZFC-Axiomatik

Vom Sinn der Abstraktion:



Mathematik: Deduktion:

erhalten Beispiel durch EINSETZEN

Bsp.: ist x gerade $\mathbb{Q}$ -Zahl, dann ist x durch 4 teilbar.
 $\uparrow$ $\uparrow$
 16

→ abstrakter Formalismus

Ziele eines abstr. 11 :

- alles soll unmissverständlich
- klar nachvollziehbar

Genauigkeit in Formulierungen wichtig, z.B.:

$$-2 = \sqrt[3]{(-8)} = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = ((-8)^2)^{1/6}$$

$$= \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

→ Geltungsbereich!

5

Idee von D. Hilbert über Axiomensysteme:

- widerspruchsfrei

- unabh.

- vollständig

- kategorisch

→ geht nicht! Gödels Unvollständigkeitssatz

Eine mathem. Aussage, die wahr ist, heißt Satz.

Varianten des Satzes:

Theorem: ein besonders wichtiger Satz

Lemma: ein Hilfssatz, welches ein Zwischenergebnis ausdrückt

Korollar: ein Satz, der ohne großem Aufwand aus einem vorangehenden Satz sofort erhältlich

Proposition: ein Satz, der eher Hilfsergebnis ist

Def.: Eine Aussage ist entweder wahr (w) oder falsch (f)

§2: Grundlegende Aussagenlogik

Aussagen: $A, B, C, \dots$

"A wahr" heißt "A gilt", ansonsten "A gilt nicht"

A ist eine Aussage.

Aber: Aussagen mit Selbstbezug sollen nicht zugelassen werden.

Bsp: "Diese Aussage ist falsch." ↯

Verknüpfung von Aussagen: "und", "oder", "nicht"

Konjunktion, Disjunktion, Negation

A, B seien Aussagen $\leadsto A \wedge B, A \vee B, \neg A$

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$
w	w	w	w	f
w	f	f	w	f
f	w	f	w	w
f	f	f	f	w

Bem.: Die Aussagen $A \vee \neg A$ bzw. $\neg(A \wedge \neg A)$ sind immer wahr.

$$\rightarrow (A \vee B) \vee (C \wedge (\neg D)) \quad \left| \quad \begin{array}{l} +, \cdot \\ \rightarrow a + (b \cdot c) \\ \rightarrow (a + b) \cdot c \end{array} \right.$$

$\neg$ bindet stärker als $\wedge$
 $\wedge$ " " " "
 $\vee$

$$A \vee B \vee C \wedge \neg D$$

$$(A \vee B) \vee C \quad A \vee (B \vee C) \quad A \vee B \vee C$$

$$(A \wedge B) \wedge C \quad A \wedge (B \wedge C) \quad A \wedge B \wedge C$$

Def.: Die Implikation / Schlussfolgerung / Folgerung

zweier Aussagen A und B ist die Aussage $\neg A \vee B$

und wird bezeichnet mit $A \Rightarrow B$.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > 3 \Rightarrow x^2 > 9 \quad w$$

$$\sim \left. \begin{array}{l} x=5: 5 > 3 \Rightarrow 5^2 > 9 \\ x=2: 2 > 3 \Rightarrow 2^2 > 9 \\ x=-4: -4 > 3 \Rightarrow (-4)^2 > 9 \end{array} \right\} w$$

"aus A folgt B"

"ex falso quodlibet"

Def.: Die Äquivalenz zweier Aussagen A und B ist die Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ und wird als $A \Leftrightarrow B$ geschrieben.

$\underbrace{(A \Rightarrow B)}_{\text{Hinrichtung}} \quad \underbrace{(B \Rightarrow A)}_{\text{Rückrichtung}}$

$\neg x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$, aber nicht " $\Leftarrow$ ", weil etwa $(-3)^2 > 4$ aber $-3 > 2$ f
 $\cdot x > 2 \vee x < -2 \Leftrightarrow x^2 > 4$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

$\vee$ bindet stärker als $\Rightarrow, \Leftarrow$
 $\Rightarrow, \Leftarrow$ " " " " $\Leftrightarrow$

$$(1) A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg A \vee f \Leftrightarrow A$$

$$A \wedge w \Leftrightarrow A$$

• $A \Rightarrow B$ heißt "aus A folgt B"

• $A \Leftrightarrow B$ heißt "A wahr gdw B wahr"

$$\neg(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$\cdot (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B \Leftrightarrow \neg A \vee \neg(\neg B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg B) \vee \neg A \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

1. Satz: Es gelten die folgenden Logikregeln für beliebige Aussagen A, B, C :

$$(1) A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$$

$$(2) (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

$$(3) (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

$$(4) \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$(5) \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$(6) A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$(7) A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

} Distributivgesetze

2. Satz: Es gelten die Logikregeln für beliebige Aussagen A, B, C :

$$(1) (A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

modus ponens

$$(2) (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Kontrapositionsregel

$$(3) (A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$

modus tollens

$$(4) (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

Transitivität von " $\Rightarrow$ "

$$(5) (A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$$

Transitivität von " $\Leftrightarrow$ "

Lemma: Für bel. Aussagen A, B, C gilt:

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)$$

Beweis: $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow \neg A \vee (B \Rightarrow C)$

$$\Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C$$

$$\Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C). \quad \square$$

Schlusskette: $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C$ (kurz: $A \Rightarrow B \Rightarrow C$)

zeigt: $A \Rightarrow C$

$$\neg (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$$

$$\Leftrightarrow A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

längere Schlusskette: $A \Rightarrow B_1 \wedge B_1 \Rightarrow B_2 \wedge B_2 \Rightarrow \dots \wedge B_n \Rightarrow C$

(kurz: $A \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow C$)

zeigt: $A \Rightarrow C$

Äquiv. Kette: $A \Leftrightarrow B \wedge B \Leftrightarrow C$ (kurz: $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$)

zeigt: $A \Leftrightarrow C$

~~$\vdash (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$~~

~~$\Leftrightarrow A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$~~

längere Äquiv. Kette: $A \Leftrightarrow B_1 \wedge B_1 \Leftrightarrow B_2 \wedge B_2 \Leftrightarrow \dots \wedge B_n \Leftrightarrow C$

(kurz: $A \Leftrightarrow B_1 \Leftrightarrow B_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow B_n \Leftrightarrow C$)

zeigt: $A \Leftrightarrow C$

Mathematischer Satz: $A \Rightarrow B$

Voraussetzung Behauptung

(Gelegentlich: $A \Leftrightarrow B$)

Direkter Beweis: Angabe einer Schlusskette: $A \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow C$

Indirekter Beweis: • Kontrapositionsbeweis: direkter Beweis von $\neg B \Rightarrow \neg A$

• Widerspruchsbeweis: direkter Beweis von $A \wedge B \Rightarrow C$,
wobei C falsche Aussage, z.B. $0=1$ etc.

Zeigt $A \Rightarrow B$, denn $(A \wedge \neg B \Rightarrow C) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \vee C$
 $\Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$.