# Ergänzung: Wachstum bestimmt divergenter Folgen

Das Zeichen "$\infty$" für Unendlich hat verschiedene Bedeutung.
Schreiben $\#\mathbb{N} = \infty$ und $\#\mathbb{R} = \infty$,
obwohl $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ können nicht bijektiv aufeinander abgebildet werden; gemeint ist, dass $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ unendliche Mengen sind.

Wir def. für eine unendl. Menge $X$ die Kardinalität $\#X$ als Ä-Klasse von $X$ unter Ä-Rel.

$$X \sim Y :\Leftrightarrow \exists \text{ Bij. } X \to Y$$

$$\rightsquigarrow \quad \#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} < \#\mathbb{R}$$

Bei bestimmter Divergenz einer reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_n \to +\infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall C > 0 \ \exists N_0 \ \forall n \geq N_0 : a_n \geq C$$

Divergente Folgen der Kombinatorik sind z.B.

$$\left.\begin{array}{l} n^k, \ k \text{ fest} \\ \binom{n}{k}, \ k \text{ fest} \\ n! \end{array}\right\}$$

wie schnell wachsend diese Fktn.,
auch im Vgl. mit $e^n$

$O(e^n) \leftarrow$ (exponentielles Wachstum)

(Nennen $n^k$: polynomielles Wachstum;)
ein Polynom vom Grad $k$ wächst ähnlich schnell wie $n^k$ $\rightsquigarrow O(n^k)$

**Def.:** O-Notation / Landau-Notation:
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\forall n : g(n) \geq 0$.
Dann:
$$f(n) = O(g(n)) :\Leftrightarrow \exists C > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} :$$
$$|f(n)| \leq C \cdot g(n).$$

---

Wachstum von $n!$ ?

Stirlingsche Formel: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$
$$:\Leftrightarrow \underbrace{\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}}_{\text{genau: } \in \left[1, 1 + \frac{1}{11n}\right]} \xrightarrow{n \to \infty} 1$$

$$\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n = \sqrt{2\pi} \cdot n^{1/2 + n} \cdot e^{-n}$$
$$= \sqrt{2\pi} \cdot \left(e^{\log n}\right)^{1/2 + n} e^{-n}$$
$$= \sqrt{2\pi} \cdot e^{n \log n + 1/2 \log n - n}$$
$$= O\left(e^{n \log n + \underbrace{1/2 \log n - n}_{\leq n \log n}}\right)$$
$$= O\left(e^{2n \log n}\right)$$
mehr als exponentielles Wachstum $O(e^{cn})$ !

Wachstum von $\binom{n}{k}$?
Hier muss ein $k$ gewählt werden, etwa $k = \frac{n}{2}$ falls $n$ gerade.

Haben $\binom{n}{n/2} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}{\left(\sqrt{2\pi \frac{n}{2}}\, \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} e^{-n/2}\right)^2}$

$$= \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}{2\pi \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cdot 2^n$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{\overbrace{n \log 2 - \frac{1}{2}\log n}^{\leq 0}}$$

$$= O\left(e^{n \log 2}\right) \qquad \underline{\underline{\text{exponentiell}}}$$

Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
$f_n$: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{= e^{n \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}} - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{\to 0} \right) = \underline{\underline{O\left(e^{cn}\right)}}$$

Beachte: $\frac{e^n}{n^k} \longrightarrow +\infty$, $\quad \frac{n^k}{(\log n)^k} \longrightarrow +\infty$,

$$\frac{(\log n)^k}{(\log \log n)^l} \longrightarrow +\infty, \ldots \qquad \text{[vgl. de l'Hopital]}$$

Bem.: "zwischen" $n^a$ und $e^n$ passen $\infty$ viele Fktn., z.B.

$$\frac{e^{c(\log n)^{3/2}}}{n^k} = e^{c(\log n)^{3/2} - k \log n} \longrightarrow \infty$$

$$\frac{e^n}{e^{c(\log n)^{3/2}}} = e^{n - c(\log n)^{3/2}} \longrightarrow \infty$$

⚠ in der Informatik heißt $O((\log n)^3)$ "polynomielle" Laufzeit, falls Input: $n$, Inputgröße: $O(\log n)$
$\rightsquigarrow$ und $O(n^k) = O(e^{k \log n})$ "exponentielle" Laufzeit (exponentiell in $\log n$!)

## LG 10: Das Auswahlaxiom

__Def.:__ • Ist $J$ eine Menge $\neq \emptyset$ und $\xi: J \to X$ eine Abb.,
so schreibe $\xi(j) = \xi_j$ und $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$,

man nennt $\xi$ eine Familie (in $X$)

mit Indexmenge $J$.

__Bem.:__ ist $J$ endlich, etwa $J = \{j_1, \dots, j_n\}$,
dann $(\xi_j)_{j \in J}$ ein $n$-Tupel, schreibe $(\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{n})$.

__Def.:__ Ist $X \neq \emptyset$ eine Menge (von Menge), so heißt

$$\bigcap X := \{a \mid \forall A \in X : a \in A\}$$

der Durchschnitt von $X$.

Bem.: Alle El., die in allen El. von $X$ vorkommen, werden zu $\bigcap X$ zusammengefasst.
Bsp.: $\bigcap\{P, Q\} = P \cap Q$, $\bigcap\{P\} = P$, ....

Notation:
Ist $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen,

so schreibe $\bigcap\limits_{j \in J} X_j = \bigcap\{X_j \mid j \in J\}$
$= \{a \mid \forall j \in J : a \in X_j\}$

**Def.:** Ist $X \neq \emptyset$ eine Menge (von Menge), so heißt

$$\bigcup X := \{a \mid \exists A \in X : a \in A\}$$

die Vereinigung von $X$.

Bem.: die El. aller El. von $X$ werden zu $\bigcup X$ zusammengefasst

Bsp.: $\bigcup\{P, Q\} = P \cup Q$, $\bigcup\{P\} = P$, $\bigcup \emptyset = \emptyset$, $\bigcup\{\emptyset\} = \emptyset$

Notation:

Ist $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen,

so schreibe $\bigcup\limits_{j \in J} X_j = \bigcup\{X_j \mid j \in J\}$
$= \{a \mid \exists j \in J : a \in X_j\}$

**Def.:** Sei $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen.

Das Kartesische Produkt $\prod\limits_{j \in J} X_j = \bigtimes\limits_{j \in J} X_j$

besteht aus allen Familien $(\xi_j)_{j \in J}$ mit $\xi_j \in J$.

Bem.: Falls $J$ endlich, $J = \{1, 2, \dots, n\}$,
schreibe wie gehabt

$$\prod_{j \in J} X_j = \prod_{j=1}^{n} X_j = X_1 \times \dots \times X_n.$$

Auswahlaxiom:

Ist $X \neq \emptyset$ eine Menge und $P := \{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset\} = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$
die Menge aller nichtleeren Teilmengen von $X$.
Dann gibt es eine (Auswahl)funktion $c : P \to X$,
die jeder Menge $A \in P$ ein Element $c(A) \in A$ zuordnet.
"auswählt"

Problem: das Axiom ist eine reine Existenzaussage, Konstruktionsvorschriften liefert es nicht.
· ⇝ Konsequenz: Kontraintuitive Folgerungen des Auswahlaxioms müssen akzeptiert werden, z.B. Satz von Banach-Tarski ←

Halten: Auswahlaxiom $\Leftrightarrow$ jede surj. Abb. hat Rechtsinverse
⌜vgl. LGA für $\Rightarrow$⌟

[Sei $f: X \to Y$ geg.
Die Abb. $g: Y \to X$ heißt Rechtsinv., falls $f \circ g = id_Y$.]

Weitere zum Auswahlaxiom äquivalente Aussagen:

($\Leftrightarrow$) Satz: Ist $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie nichtleerer Mengen,

dann ist $\prod_{j \in J} X_j \neq \emptyset$.

($\Leftrightarrow$) Satz: Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Problem: es ist i.a. nicht möglich, eine Basis eines bel. Vektorraumes explizit anzugeben!

$\boxed{\text{Auswahlaxiom} \underset{(\text{"}\Leftarrow\text{"})}{\overset{\uparrow}{\Rightarrow}} \underline{\text{Lemma von Zorn}}} \Rightarrow$ Jeder VR hat eine Basis.

$\Uparrow$
Fixpunktsatz von Bourbaki