Notiz zu LG11

§1: ZFC

Ebbinghaus

Die ZFC-Axiome der Mengenlehre.

Dabei steht Z für E. Zermelo (1871-1953)
F für A. Fraenkel (1891-1965)
und C für "choice", d.h. Auswahlaxiom.

Die 10 ZFC-Axiome:

Axiom 1: Extensionalitätsaxiom

Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

$$\forall A,B: \quad A=B \Leftrightarrow \forall C: (C\in A \Leftrightarrow C\in B)$$

Bsp.: $\underbrace{2\mathbb{Z}}_{=:A} = \underbrace{\{m\in\mathbb{Z} \mid (-1)^m = 1\}}_{=:B}$

„$\subseteq$": $c\in A$, etwa $c=2\cdot z$, dann: $(-1)^c = (-1)^{2z} = 1$
also $c\in B$.

„$\supseteq$": $c\in B$, d.h. $(-1)^c=1$.
Dann schreibe $c=2z$ bzw. $c=2z+1$ für $z\in\mathbb{Z}$.
Im 1. Fall $c\in A$ ✓, im 2. Fall: $(-1)^{2z+1} = (-1)^1 = -1$ ↯

□

Axiom 2: Leermengenaxiom (älter: Nullmengenaxiom)

Es gibt eine Menge, die keine Elemente hat.

$$\exists A\ \forall X: X\notin A$$

Bem.: Ax. 2 garantiert die Existenz von $\emptyset$,
aus Ax. 1 folgt bereits die Eindeutigkeit von $\emptyset$.

Axiom 3: Paarmengenaxiom

Für alle A und B gibt es eine Menge, die A und B als El. hat.

$$\forall A, B\ \exists C\ \forall D: (D \in C \Leftrightarrow D = A \vee D = B)$$

Bem.: C ist nach Ax. 1 eind. best., schreiben $C = \{A, B\}$

Bsp.: im $\mathbb{R}^2$: $g = \{y = 0\}$ x-Achse

$g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$

$h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} = \{x = 0\}$ y-Achse

$$C = \{g, h\} \rightsquigarrow \# C = 2$$

Achtung: $C = \{g, h\} \neq \underbrace{g \cup h}_{\text{Achsenkreuz}}$

Axiom 4: Vereinigungsaxiom

Für jede Menge A gibt es eine Menge B, deren Elemente genau die Elemente der Elemente von A sind

$$\forall A\ \exists B\ \forall C: (C \in B \Leftrightarrow \exists D: D \in A \wedge C \in D)$$

Bem.: · Nach Axiom 1 ist B eind. best. und heißt die Vereinigung(smenge) von A, geschrieben $B = \bigcup A$.

· Sind A, B Mengen, ex. nach Ax 3 die Menge $\{A, B\}$ und somit nach Ax. 4 dann $A \cup B = \bigcup \{A, B\}$

Bsp.: g, h wie oben $\overset{Ax.3}{\rightsquigarrow} A = \{g, h\} \xrightarrow{Ax.4} B = \underbrace{g \cup h}_{\text{Achsenkreuz im } \mathbb{R}^2}$

Axiom 5: Potenzmengenaxiom

Zu jeder Menge A gibt es eine Menge B, deren El. genau die Teilmengen von A sind: $\forall A\ \exists B\ \forall C: C \in B \Leftrightarrow \underbrace{(\forall D: D \in C \Rightarrow D \in A)}_{C \subseteq A}$

Bem.: schreiben $\mathcal{P}(A) := \{C \subseteq B\}$

Axiom 6: Aussonderungsaxiom

Ist A eine Menge und Φ eine Aussage/Bed. (genau: ein Prädikat), so gibt es eine Teilmenge B von A, die genau die El. C von A enthält, für die $\Phi(C)$ wahr ist.

$$\forall A\ \exists B\ \forall C: C \in B \Leftrightarrow C \in A \wedge \Phi(C)$$

Bem.: Somit ex. "eingeschränkte" Mengen der Form $\{C \in A \mid \Phi(C)\}$

Bsp.: • $A = \mathbb{P} \rightsquigarrow B = \{a \in A \mid a \neq 2\} = \mathbb{P} \setminus \{2\}$

• $A = \mathbb{N},\ B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists p_1, p_2 \in \mathbb{P} \setminus \{2\}: n = p_1 + p_2\}$

$$\overset{?}{=} 2 \cdot \mathbb{N}$$

$\subseteq$ ✓, $\supseteq$: ? unbekannt.

Bem.: Die Formulierung mit Grundmenge A ist nötig, um die Russel-Antinomie zu vermeiden: sonst impliziert Axiom 5 mit $\exists B\ \forall C: C \in B \Leftrightarrow C \notin C$ die Ex. der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, die Russel-Menge R, die den logischen Widerspruch $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ ↯

Axiom 7: Ersetzungsaxiom (nach Fraenkel)

Ist A eine Menge und Φ eine Aussage/Bed. (ein Prädikat), die jeder Menge B genau eine Menge Φ_B zuordnet, so ist $D = \{\Phi_F \mid F \in A\}$ wieder eine Menge.

$$\forall A: (\forall B\ \exists! C: \Phi(B, C)) \Rightarrow (\exists D\ \forall E: E \in D$$
$$\Leftrightarrow \exists F: F \in A: \Phi(F, E))$$

Bem.: Wird jedes El. von A durch eine neue Menge ersetzt, entsteht eine neue Menge. $\rightsquigarrow D = \{E \mid \exists F \in A \wedge \Phi(F, E)\}$

Bsp.: $\Phi : B \longrightarrow \begin{cases} g_B & , B \in \mathbb{R} \\ \emptyset & , B \notin \mathbb{R} \end{cases}$ (g_B: Gerade im $\mathbb{R}^2$ durch $(0,0)$ mit Steigung B)

$A = [\frac{1}{2}, 1] \subseteq \mathbb{R}$

Dann: $D = \{ g_B \mid B \in [\frac{1}{2}, 1] \}$ ⇝ Menge aller Geraden mit Steigung zw. $\frac{1}{2}$ und 1

Bem.: Ax. 7 impliziert Ax. 6

<u>Axiom 8:</u> <u>Unendlichkeitsaxiom</u>

Es gibt eine Menge A mit $\emptyset \in A$ und
$\forall B : B \in A \Rightarrow B \cup \{B\} \in A$

Bem.: Diese Mengen A enthalten offenbar alle die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, vgl. LG4.

<u>Axiom 9:</u> <u>Fundierungsaxiom / Regularitätsaxiom</u>

Jede nichtleere Menge A enthält ein El. B, so dass A und B disjunkt sind.

$\forall A : A \neq \emptyset \Rightarrow \exists B : B \in A \wedge \forall C : \underbrace{C \notin A \vee C \notin B}_{\Leftrightarrow \neg (C \in A \wedge C \in B)}$

Bem.: Ax. 9 dient dazu, unendl. logk lische Ketten der Form $A_1 \ni A_2 \ni A_3 \ni \ldots$ auszuschließen

<u>Axiom 10:</u> <u>Auswahlaxiom</u>

Ist A eine Menge von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen, so gibt es eine Menge B, die genau ein El. aus jedem El. von A enthält. $\forall A : \emptyset \notin A \wedge (\forall C, D, E : C \in A \wedge D \in A \wedge E \in C \wedge E \in D \Rightarrow C = D)$
$\Rightarrow (\exists B \, \forall F : F \in A \Rightarrow \exists! G : G \in F \wedge G \in B)$

Bem.: Das ZFC-Axiomensystem ist redundant,
d.h. die folgenden Axiome sind entbehrlich:

- Das Aussonderungsax. 6 folgt aus Ersetzungsax. 7.
- Das Leermengenax. 2 folgt aus dem Aussonderungsax. 6 und der Ex. irgendeiner Menge (z.B. Unendlichkeitsax. 8).
- Das Paarmengenax. 3 folgt aus Ersetzungsax. 7 und dem Potenzmengenax. 5.

Laut Gödel: Mathematik, die auf ZFC aufbaut, ist entweder widersprüchlich oder unvollständig (d.h. nicht jede im ZFC-System formulierbare wahre Aussage kann darin bewiesen werden).

Ende