Notiz zu LG 3

Beweistheorie

Satz: Für Mengen A, B, C gilt:
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Bew.: $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in A \cap B \quad \vee \quad x \in A \cap C$
$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$ $\square$

Oder: zeige „$\subseteq$" und „$\supseteq$".

Nachtrag zu Quantoren:

$\forall t, G(t) : H(t)$
ist äqu. zu: $\forall t : G(t) \Rightarrow H(t)$ } "Alle grünen Tische sind 1m hoch"
ist nicht äqu.: $\forall t : G(t) \wedge H(t)$ } "Alle Tische sind grün & 1m hoch"

$\exists t, G(t) : H(t)$
ist äqu. $\exists t : G(t) \wedge H(t)$ } "Es gibt einen grünen Tisch, der 1m hoch ist."
ist nicht äqu.: $\exists t : G(t) \Rightarrow H(t)$ "Es gibt einen Tisch mit der Eigenschaft: Wenn er grün ist, dann ist er 1m hoch."

Ein math. Satz ist meist als $\underset{\text{Vor.}}{A} \Rightarrow \underset{\text{Beh.}}{B}$ gegeben.

1\. Bsp.:
Satz: Sind U, V nichtleere Mengen mit $U \cap V = \emptyset$, ← Vor. "A"
$\underbrace{\text{dann}}_{"\Rightarrow"}$ ist $\underbrace{V \not\subseteq U}_{\text{Beh. "B"}}$.

Umformulierung: $\forall\, U, V$ nichtleere Mengen, $U \cap V = \emptyset : V \not\subseteq U$.
$\forall\, U, V$ Mengen: $U \neq \emptyset \wedge V \neq \emptyset \wedge U \cap V = \emptyset \Rightarrow V \not\subseteq U$

Ein Satz in der Formulierung Satz: Vor.: A_1
Beh.: $A_2 \Rightarrow B$

ist äquivalent zur Formulierung Satz: Vor.: $A_1 \wedge A_2$
Beh.: B

[Gilt, da $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B)$,
vgl. LG 1]

<u>1. Bsp.:</u> Vor.: Seien U, V Mengen mit $U \neq \emptyset \neq V \wedge U \cap V = \emptyset$.
Beh.: $V \nsubseteq U$.

Bzw.: Vor.: Seien U, V Mengen mit $U \neq \emptyset \neq V$.
Beh.: $U \cap V = \emptyset \Rightarrow V \nsubseteq U$.

<u>Bew.:</u> Ist $U \neq \emptyset \neq V$ mit $U \cap V = \emptyset$, dann ist für jedes $x \in V$ dann $x \in V \setminus U$. Da $V \neq \emptyset$ folgt also $\exists x \in V : x \notin U$, also $\neg(\forall x \in V : x \in U)$, also $\neg(V \subseteq U)$. □

<u>2. Bsp.:</u> Satz: Gerade Quadratzahlen sind durch 4 teilbar.
Vor.: Sei n gerade Qzahl.
Beh.: 4 teilt n.

In Formeln: Vor.: $n \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N} : n = 2m$, $\exists k \in \mathbb{N} : n = k^2$.
Beh.: $\exists l \in \mathbb{N} : n = 4l$.

Bew.: Ist $n = 2m = k^2$, so folgt, dass k gerade ist, also $k = 2j$ mit $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $n = k^2 = (2j)^2 = 4 \cdot j^2$, also tut's $l = j^2$. [also ist mit $l = j^2$ die Beh. richtig] □

→ direkter Beweis von $A \Rightarrow B$: Angabe einer Schlusskette $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$

<u>3. Bsp.:</u> Satz: Sei x reelle Zahl mit $x^2 = 1$. Dann ist $x = 1 \vee x = -1$.

Bew.: $x^2 = 1 \underset{\text{umformen}}{\Rightarrow} x^2 - 1 = 0 \underset{\text{3. bin. Formel}}{\Rightarrow} (x-1)\cdot(x+1) = 0 \underset{yz=0 \Rightarrow y=0 \vee z=0}{\Rightarrow} x-1=0 \vee x+1=0 \Rightarrow x=1 \vee x=-1$. □

Indirekte Beweise

1.) **Kontrapositionsbeweis**: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

ist eine Schlusskette $\neg B \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_k \Rightarrow \neg A$.

4. **Bsp.:** Satz:

1. Version:
Vor.: $\underbrace{k \in \mathbb{N}}_{A_1}$, $\underbrace{10^k \text{ nicht durch } 4 \text{ teilbar}}_{A_2}$.
Beh.: $k = 1$. $\leftarrow B$

2. Version:
Vor.: $\underbrace{k \in \mathbb{N}}_{A_1}$,
Beh.: $\underbrace{10^k \text{ nicht durch } 4 \text{ teilbar}}_{A_2} \Rightarrow \underbrace{k = 1}_{B}$.

Haben: $(A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A_1 \vee \neg A_2)$ 1. Version

- $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A_1 \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A))$ 2. Version

Bew. in 1. Version: Ist $k \neq 1$, dann ist $k \notin \mathbb{N}$ oder (wenn $k \in \mathbb{N}$) $k \geq 2$. Also ist $k \notin \mathbb{N}$ oder
$10^k = 4 \cdot 25 \cdot \underbrace{10^{k-2}}_{\in \mathbb{N}, \text{ da } k \geq 2}$ durch 4 teilbar. $\square$

Bew. in 2. Version: Sei $k \in \mathbb{N}$. Ist $k \neq 1$, dann ist also $k \geq 2$.
Es folgt $10^k = 4 \cdot 25 \cdot \underbrace{10^{k-2}}_{\in \mathbb{N}, \text{ da } k \geq 2}$ durch 4 teilbar. $\square$

2.) **Widerspruchsbeweis**: $(\underbrace{A \wedge \neg B} \Rightarrow \underbrace{C}_{f}) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

Das Aufschreiben eines Widerspruchsbeweis in 3 Schritten:
1. Formulierung der Annahme $\neg B$
2. Formulierung eines direkten Beweises von $A \wedge \neg B \Rightarrow C$
3. Feststellung, dass C falsch (bzw. $C \Leftrightarrow \neg A$) ist: Widerspruch. ↯, dann Beweisende.

5. Bsp.: Satz: Für $x > 9$ hat die Glg. $\sqrt{x} = 2$ keine Lsg.
Beweis (durch Widerspruch):
1. Angenommen, $x \in \mathbb{R}$ sei eine Lsg. der Glg. $\sqrt{x} = 2$.
2. Dann folgt $2 = \sqrt{x} > \sqrt{9} = 3$, also folgt $2 > 3$.
   da $x > 9$ und $\sqrt{\ }$ s.m.w.
3. Widerspruch, da $2 > 3$ falsch. □

Beweise von Sätzen mit Quantoren

1.) Beweis eines Satzes mit $\exists$:

Satz: $A \Rightarrow \exists x \in M : P(x)$

6. Bsp.: Satz: Beh.: $\exists k \in \mathbb{N} : 2^{2^k} + 1$ ist keine Primzahl.
Bew.: Für $k = 5$ ist $2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$ zus.gesetzt. □

Dirichletsches Schubfachprinzip:

Gilt $M = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_m$, und hat M genau k viele Elemente und ist $k > m$, dann $\exists j \in \{1, \ldots, m\} : T_j$ hat mehr als ein Element.

2.) Beweis eines Satzes mit $\forall$:

Satz: $A \Rightarrow \forall x \in M : P(x)$

a) durch expliziten Beweis für jedes Element x der Reihe nach, falls es nicht zuviele Elemente sind
b) Beweis von $P(x)$ für jedes beliebige, aber fest gewählte x, auf abstraktem Wege,
c) man teilt M auf in separate Teilmenge $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_m$, und beweist $P(x)$ für jedes $x \in M_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, separat.
⇝ Fallunterscheidung mit m Fällen (mit m vielen Unterbeweisen, wo wieder a), b) oder c) benutzt werden.)

8. Bsp. für a): Satz: $\forall k \in \{1,\dots,4\}: 2^{2^k}+1$ ist Primzahl.

Bew.: Die Zahl $2^{2^1}+1=5$ ist PZ, $2^{2^2}+1=17$ ist PZ, $2^{2^3}+1=257$ ist PZ, $2^{2^4}+1=65537$ ist PZ. $\square$

9. Bsp. für b): Satz: Für alle reellen Zahlen x,y gilt $4xy \leq (x+y)^2$.

[Seien x,y reelle Zahlen. Dann: "]

Bew.: Haben: $(x-y)^2 \geq 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{2. bin. F.}}}{\Rightarrow} x^2-2xy+y^2 \geq 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Idee: } +4xy \text{ auf beiden Seiten}}}{\Rightarrow} x^2+2xy+y^2 \geq 4xy$

$\Rightarrow 4xy \leq (x+y)^2$. $\square$

10. Bsp. für c): Satz: Jede Quadratzahl n^2 lässt bei Division durch 8 den Rest 0, 1 oder 4. $[\forall n \in \mathbb{N} = \underset{\uparrow}{G} \cup \underset{\uparrow}{U}]$

Beweis: 1. Fall: n gerade: Dann ist $n=2k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $n^2=4k^2$.
- Falls k gerade, dann $k=2l$ mit $l \in \mathbb{N}$, dann $n^2=4\cdot 4l^2$, lässt n^2 Rest 0 bei Div. durch 8.
- Falls k ungerade, dann $k=2l+1$ mit $l \in \mathbb{N}_0$, dann $n^2=4\cdot(2l+1)^2=16l^2+16l+4$, lässt Rest 4.

2. Fall: n ungerade: Dann ist $n=2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, und $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$ lässt Rest 1, weil $k(k+1)$ stets gerade und daher $4k(k+1)$ durch 8 teilb. $\square$

Widerlegen von Sätzen / Beweis von negierten Quantorenaussagen:

a) Ist ein Satz der Form $A \Rightarrow \forall x: P(x)$ zu widerlegen, wird $\neg(A \Rightarrow \forall x: P(x)) \Leftrightarrow \underline{A} \wedge \exists x: \neg P(x)$.

→ Konstruktion eines Gegenbeispiels

b) Ist ein Satz der Form $A \Rightarrow \exists x: P(x)$ zu widerlegen, wird $\neg(A \Rightarrow \exists x: P(x)) \Leftrightarrow \underline{A} \wedge \forall x: \neg P(x)$

dazu muss für jedes x dann $\neg P(x)$ gezeigt werden.