Notiz zu LG4

Noch ein Bsp für Beweisführungen:

Satz: Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann beschränkt, falls $|a| \leq 1$.

Erinnerung: Def.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **beschränkt** $:\Leftrightarrow$

$$\exists C > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C.$$

Bsp.: $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschr., $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschr.

Laut Def.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschr. $\Leftrightarrow$ $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschr.
⌜da $||a_n|| = |a_n|$⌟

Beweis:

Laut Def. genügt es, z.z.:

(*) $\underline{\forall a \geq 0}$: $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschr. $\Leftrightarrow$ $0 \leq a \leq 1$.

⌜Für $a \in \mathbb{R}$ gilt:
$(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschr. $\Leftrightarrow$ $(|a|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschr.

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ $0 \leq |a| \leq 1$ $\Leftrightarrow$ $-1 \leq a \leq 1$.⌟

1. Zu „$\Leftarrow$" von (*): Ist $0 \leq a \leq 1$, dann ist

$$a^n \leq 1^n = 1, \text{ also tut's } C = 1.$$

2. Zu „$\Rightarrow$" von (*): Sei $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschr.,

d.h. $\exists C > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : a^n \leq C$.

Sonst sei $a > 1$. Dann

$\forall n \in \mathbb{N}$: $a^n \leq C$ $\overset{\text{log. s.m.w.}}{\Leftrightarrow}$ $n \underbrace{\log a}_{>0} \leq \log C$

$\underset{a>1}{\Leftrightarrow}$ $n \leq \frac{\log C}{\log a}$,

im ↯ dazu, dass $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt. $\square$

§1: Konstruktion der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ konstruieren?

Peano-"Axiome": $\mathbb{N}_0$ ist eine Menge mit

(i) einem Element $0 \in \mathbb{N}_0$
(ii) jede nat. Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ hat einen Nachfolger $s(n) \in \mathbb{N}_0$
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : s(n) \neq 0$ ⌜0 ist nicht Nachf. einer nat. Zahl⌟
(iv) $\forall m, n \in \mathbb{N}_0 : s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$
⌜Eind. des Vorgängers⌟
(v) $\forall X$, X Menge, $0 \in X : (\forall n \in X : s(n) \in X) \Rightarrow \mathbb{N}_0 \subseteq X$.
⌜Induktionsprinzip⌟

Existenz der nat. Zahlen:

Konstruktion von $\mathbb{N}_0$:

$0 := \emptyset$, für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $s(n) := n \cup \{n\}$.

Also:
$1 := s(0) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$
$2 := s(1) = s(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$
$3 := s(2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$

$\rightsquigarrow$ Jede nat. Zahl ist die Menge ihrer Vorgänger.

⌜Alternativ: $0 := \emptyset$, $s(n) := \{n\}$⌟

Zeigbar (mit ZFC-Mengenlehre + Logik): (i) – (v) mit dieser Konstruktion
⌜$\rightsquigarrow$ insb.: $\mathbb{N}_0$ ist unendliche Menge⌟

Erkläre "+" mit $s(n)$:

$n + 0 := n$, $n + 1 := s(n)$,
$n + 2 := s(s(n)), \dots$, $n + m := \underbrace{s(s(\cdots s}_{m\text{-mal}}(n))\cdots)$

bzw. $n + \underbrace{(m+1)}_{s(m)} := s(n+m)$.

$\rightsquigarrow$ Peano-Arithmetik: alle Rechengesetze für $\underline{\mathbb{N}}_0$ mit $+, \cdot, \leq$

[Def.: $n \leq m :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : n+k=m$

Zusammenhang zw. Induktionsprinzip (v) und rekursiven Definition:

Satz: Mit (v) kann man beweisen, dass stets eindeutig eine Folge existiert, die einer gegebenen rekursiven Bildungsvorschrift genügt.

Rekursive/induktive Definition:

Sei $x(n)$ ein Objekt, welches von $n \in \underline{\mathbb{N}}_0$ abhängt, und eine Bildungsvorschrift F gegeben, mit der ein neues Objekt $F(x(n))$ gebildet werden kann, welches wir $x(n+1)$ nennen.

$\rightarrow$ $\underbrace{x(0)}_{\text{Startwert}}, \underbrace{x(n+1) := F(x(n))}_{\text{Rekursion}}$ für alle $n \in \underline{\mathbb{N}}_0$

$\rightarrow$ Iterative Definition: Def. durch Wiederholung

Grenzen der Peano-Arithmetik: Goodstein-Folge

§2: Das Prinzip der vollständigen Induktion (v):

(VI) $\forall A(x)$, Aussage/Prädikat in x:

$$\underbrace{A(0)}_{\text{Ind.anfang}} \wedge (\forall n \in \mathbb{N}_0 : \underbrace{A(n) \Rightarrow A(n+1)}_{\text{Ind. schritt}}) \Rightarrow \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}_0 : A(n)}$$

[$A(0) \Rightarrow A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \ldots$]

Satz: (v) $\Leftrightarrow$ (VI).

1\. Bsp.: Kleiner Gauß: Für $d_1 := 1$, $d_{n+1} := d_n + (n+1)$
gilt: $\forall n \in \mathbb{N}: d_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ind.anf.: $n = 1$: $d_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

Ind.schritt: $n \to n+1$: es gelte die Formel für n, dann stimmt sie auch für $n+1$, denn

$$d_{n+1} = d_n + (n+1) \overset{\text{Ind.vor.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \quad \square$$

Variante:
(VI') $\forall A(x)$, Aussage/Prädikat in x:
$$\underbrace{A(0)}_{\text{Ind.anfang}} \wedge \left(\forall n \in \mathbb{N}_0 : (\forall m \in \mathbb{N}_0, m < n : A(m)) \Rightarrow A(n)\right)$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : A(n)$$

3\. Bsp.: Für die Folge $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$
gilt
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\gamma^n - \gamma_0^n), \quad \gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \gamma_0 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Beweis (mit vollst. Ind.):
Ind.anfang: $n = 0$: $f_0 = 0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\gamma^0 - \gamma_0^0)$
$n = 1$: $f_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ ✓

Ind.schritt:
$n-1, n \to n+1$: Sei Formel wahr für $n-1$ und n, dann stimmt sie auch für $n+1$, denn $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\gamma^{n-1} - \gamma_0^{n-1} + \gamma^n - \gamma_0^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\gamma^{n-1}\underbrace{(1+\gamma)}_{\overset{!}{=}\gamma^2} - \gamma_0^{n-1}\underbrace{(1+\gamma_0)}_{\overset{!}{=}\gamma_0^2}\Big)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\gamma^{n+1} - \gamma_0^{n+1}). \quad \square$$

[$A(n)$ = "die Formel gelte für n", mit (VI') folgt, dass $\forall n \in \mathbb{N}_0 : A(n)$, denn der Bew. zeigt:
$\underbrace{A(0), A(1)}_{\text{Ind.anf.}}$, $A(0) \wedge A(1) \Rightarrow A(2)$, $A(0) \wedge \underbrace{A(1) \wedge A(2)}_{\text{nur diese Vor. wird benötigt}} \Rightarrow A(3)$, $A(0) \wedge A(1) \wedge \underbrace{A(2) \wedge A(3)}_{\text{nur diese Vor. wird benötigt}} \Rightarrow A(4)$ …]

Leere Σ ist $= 0$: $\quad$ M sei endl. Menge

$$\sum_{k\in M} a_k = \sum_{k \in M \dot\cup \emptyset} a_k \overset{!}{=} \sum_{k\in M} a_k + \sum_{k\in\emptyset} a_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k\in\emptyset} a_k := 0$$

Leeres $\prod$ ist $= 1$: $\quad$ M sei endl. Menge

$$\underbrace{\prod_{k\in M} a_k} = \prod_{k \in M \dot\cup \emptyset} a_k \overset{!}{=} \underbrace{\prod_{k\in M} a_k} \cdot \prod_{k\in\emptyset} a_k$$

$$\xRightarrow{\prod_{k\in M} a_k \neq 0} \prod_{k\in\emptyset} a_k := 1$$

$a^0 = 1$ für $a \neq 0$: $\quad \underbrace{a^m} = a^{m+0} = \underbrace{a^m} \cdot a^0$

$$\xRightarrow{a^m \neq 0} a^0 = 1.$$

$$⌜\; 0 = \underbrace{0^m} = \underbrace{0^m}_{=0} \cdot \underbrace{0^0}_{?} = 0 \;⌟$$

$$⌜\; \exp(0) = \sum_{m\geq 0} \frac{0^m}{m!} = \frac{0^0}{0!} = 1 \;⌟$$

Noch ein Bsp. für vollst. Ind.: Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$

Bew. (VI): $\underbrace{n = 1}$: $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$ ✓

$\underbrace{n \to n+1}$: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\text{I.Vor.}}{\geq} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{!}{\geq} \sqrt{n+1}$

⌜ Zu "$\overset{!}{\geq}$": $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1} \Leftarrow \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \geq n+1$

$$\Leftarrow n(n+1) \geq n^2 \Leftarrow n^2 + n \geq n^2 \Leftarrow \underbrace{n \geq 0}. \;⌟ \;\square$$