Notiz zu LG 5

§1: Kartesische Produkte

$\{1,2\} = \{2,1\} = \{2,1,1\}$

$\rightsquigarrow$ Paare?

Eigenschaft: $(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$

Kuratowski-Konstruktion:

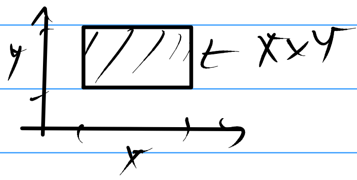
$$(x,y) := \{\{x\}, \{x,y\}\}$$

⌈ Haben Eigenschaft, denn:

$(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow \{\{x\}, \{x,y\}\} = \{\{u\}, \{u,v\}\}$

Wir folgern:
- Ist $\{u\} = \{x\}$, so ist $x = u$ und $\{x,y\} = \{u,v\} \underset{x=u}{=} \{x,v\}$, also $v = y$.
- Ist $\{u\} = \{x,y\}$, so ist $x = y = u$ und $\{x,y\} = \{u\} = \{v\}$, also $y = x = u = v = y$. ⌋

Def: Sind X, Y Mengen, so heißt
$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ kartesisches Produkt.



} Kartesisches Koordinaten-System

Bsp.: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$X = X_1 \cup X_2$, $Y = Y_1 \cup Y_2$

Dann: $X \times Y \neq (X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2)$.

Bsp.: $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{2\}$, $Y_1 = \{1\}$, $Y_2 = \{2\}$.

Weiter: $((X_1 \times X_2) \times X_3) \times X_4 \ldots$

$X_1 \times (X_2 \times X_3)$

Tripel: $(x_1, x_2, x_3) := ((x_1, x_2), x_3)$
$\rightsquigarrow X_1 \times X_2 \times X_3 := \{(x_1, x_2, x_3), \ldots\}$

in der lin. Algebra übliche/konvention: Schreibweise $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

n-Tupel: $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) := ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$ (rekursiv)

$\rightsquigarrow X_1 \times \ldots \times X_n = \bigtimes_{i=1}^{n} X_i$

Falls $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, ist $X^n := \bigtimes_{i=1}^{n} X$

$\rightsquigarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ...

§2: Relationen

Def.: Jede Teilmenge $R \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n$ von Mengen $X_1, \ldots, X_n$ heißt n-stellige Relation
speziell: $R \subseteq X \times Y$

Bsp.: $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 3, 5\}$, $R := \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5)\}$
$\rightsquigarrow$ "<", es ist $\underbrace{x < y}_{xRy} \iff (x,y) \in R$

Konvention:
Schreiben $\underset{\sim}{xRy}$ für die Aussage $\underline{(x,y) \in R}$

Bsp.: "$\leq$" in $\mathbb{R}$, "$|$" in $\mathbb{N}$, "$\subseteq$" mit Mengen, "$\perp$" bei Geraden

Eigenschaften von 2-stelligen Relationen $R \subseteq X \times X$: $(X = Y)$

(7) R reflexiv $:\iff \forall x \in X: xRx$
(8) R symmetrisch $:\iff \forall x, y \in X: xRy \Rightarrow yRx$
(9) R asymmetrisch $:\iff \forall x, y \in X: xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
(10) R antisymmetrisch / identitiv $:\iff \forall x, y \in X: xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.
(11) R linear / konnex / total $:\iff \forall x, y \in R: xRy \vee yRx$
(12) R transitiv $:\iff \forall x, y, z \in X: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

§3: Ordnungen

Def.: • Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt Ordnung(srelation) / partielle Ordnung / Halbordnungen, falls sie reflexiv (7), antisymm. (10) und transitiv (12) ist.

• Eine Ordnung heißt Anordnung / totale Ordnung / lineare Ordnung, falls sie zusätzlich linear/total (11) ist.

• Eine Rel. $R \subseteq X \times X$ heißt strenge Ordnung, wenn R asymm. (9) und transitiv (12) ist.

Da (9) und (11) zusammen nicht gelten können, betr. (11') $\forall x, y \in X: x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$.

Bem.: Die Eigenschaft (9) $\wedge$ (11') ist äquiv. zu

(13) R ist trichotomisch $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X: xRy \,\dot{\vee}\, x = y \,\dot{\vee}\, yRx$.

• Eine Rel. $R \subseteq X \times X$ heißt strenge Anordnung wenn (9) $\wedge$ (11') $\wedge$ (12) $\Leftrightarrow$ (12) $\wedge$ (13).

Bsp.:

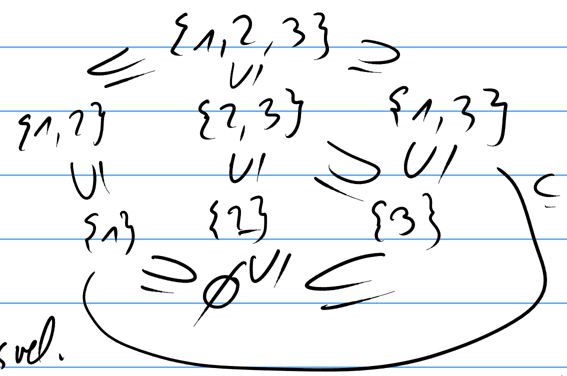
1. M sei endl. Menge, $X := \mathcal{P}(M) = \{N \subseteq M\}$

$\rightsquigarrow$ "$\subseteq$" ist Ordnungsrel.

$N \subseteq N$ ✓ $\quad U \subseteq V \wedge V \subseteq U \Rightarrow U = V$ ✓,

$U \subseteq V \wedge V \subseteq W \Rightarrow U \subseteq W$ ✓

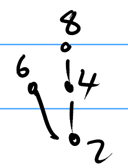
Bsp.: $M = \{1, 2, 3\}$:



nicht linear / total

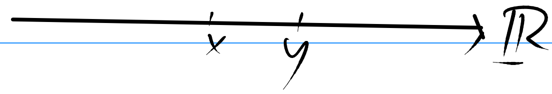
2. "$\subsetneq$" ist strenge Ordnungsrel.
3. $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bilden "$\leq$" bilden totale Ordnung.
4. Bsp. in 1. ist nicht total
5. $\mathbb{N}$ mit "$|$" (teilen) ist geordnet, aber nicht total: $2 \nmid 5$, $5 \nmid 2$

6. $M=\{2,4,6,8\}$, $N=\{2,4,8\}$ mit "|"

M:  N:  $grEl(N)=8=\max(N)$

Ordnung — totale Ordnung

6 ist max(M), 8 ist max(M)
es ex. kein grEl(M)

↳ "Zahlenstrahl": wie bei 

7. $\mathbb{C}$ ist nicht anordenbar,
d.h. nicht verträglich mit $+, \cdot$

<u>Def:</u> Sei X geordnete Menge mit Rel. "$\leq$"
- $g\in X$ heißt <u>größtes El.</u>, falls $\forall x\in X: x\leq g$
Notation: $grEl(X)$
- $m\in X$ heißt <u>maximales El.</u>, falls $\forall x\in X: m\leq x \Rightarrow x=m$.
Notation: $\max(X)$

<u>Bem:</u> $grEl(X)\Rightarrow maxEl(X)$ ✓, totale Ordn.: $maxEl(X)=grEl(X)$

<u>Bsp.:</u> $\mathbb{N}_0$ mit $\leq$ ist total geordnet,
$\min(\mathbb{N}_0)=klEl(\mathbb{N}_0)=0$,
aber $\max(\mathbb{N}_0)$ ex. nicht, $grEl(\mathbb{N}_0)$ ex. nicht.

<u>Satz:</u> Total geordnete Mengen besitzen höchstens ein max. El.,
das ist größtes El., falls es existiert.
Falls $\max(M)$, $grEl(M)$ ex., dann schreibe $x=\max(M)$,
$x=grEl(M)$.

Bem.: Die Schreibweise "$x=\max(M)$" bedeutet zweierlei:
1. ein $\max(M)$ existiert
<u>und</u> 2. es ist eindeutig bestimmt und gleich x

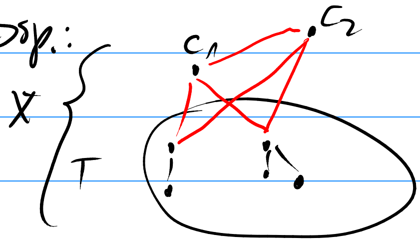
Vgl. dies mit "$x=\lim_{n\to\infty} a_n$", es bedeutet:
1. die Folge (a_n) kgt., d.h. ein $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert
<u>und</u> 2. er ist (eindeutig bestimmt und) gleich x

→ die Aussage der Formel besteht aus zwei Teilaussagen

Sei R Ordnung auf X, d.h. $R \subseteq X \times X$ mit (9), (10), (12).
Wird R auf eine Teilmenge $T \subseteq X$ eingeschränkt, d.h. bzw. $R_T := R \cap (T \times T)$, so erhält man eine <u>Teilordnung auf T.</u>

§4: Schranken und Supremum / Infimum

Bsp.:



$\rightarrow$ grEl(T) ex. nicht

grEl$(\underbrace{T \cup \{c\}}_{\times}) = c$

Def.: Sei X mit $\leq$ geordnet und $T \subseteq X$.
Ein $c \in X$ heißt <u>obere Schranke von T</u>,
falls $\forall x \in T: x \leq c$. Notation: obSchr$(T)$
Falls eine ob. Schr. existiert, dann heißt T <u>nach oben beschränkt.</u>

Bem.:
- $c =$ obSchr$(T) \iff c =$ grEl$((T \cup \{c\})$
- ex. grEl(T) in T, so ist es obSchr(T).

Bsp.: $X = \mathbb{Q}$, $T = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit "$\leq$"
hat obSchr. $1, \frac{3}{2}, 2, 4, \ldots$

Def.: Sei X mit $\leq$ geordnet und $T \subseteq X$.
Sei $s \in X$ heißt <u>Supremum</u> von T,
falls s ein KlEl$(\{c \mid c$ ist obSchr$(T)\})$ ist,
d.h. falls s obSchr(T) ist und
$\forall c$, c ist obSchr(T): $s \leq c$.

Bem.: Falls Supremum ex., ist es eind. best., schreiben: <u>$s = \sup(T)$.</u>

Zusammenhänge: $\max(T) \Leftarrow$ grEl$(T) \Rightarrow \sup(T) \Rightarrow$ obSchr(T)

(wenn zu T gehörig)

<u>Bsp.:</u> • $X=\mathbb{Q}$, $T=\{1-\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$,

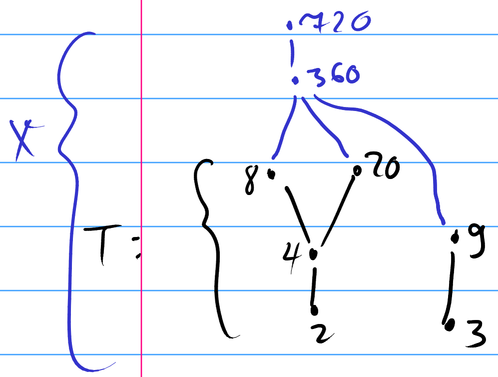
$\mathcal{S}=\{x\in\mathbb{Q}\mid x\geq 1\}$ ist Menge aller oberen Schr.

Haben $\sup(T)=\mathrm{klEl}(\mathcal{S})=1$.

• $X=\mathbb{Q}$, $T=\{x\mid x^2\leq 2\}$, dann ist $\mathcal{S}=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2>2\}$,
$\sup(T)$ ex. nicht.

• $X=\mathbb{R}$, $T=\{x\mid x^2\leq 2\}$, dann ist $\mathcal{S}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2\geq 2\}$,
$\sup(T)=\sqrt{2}$.

• $T=\{2,3,4,8,9,20\}$, $X=T\cup\{360,720\}$,
$R\subseteq X\times X$ geg. durch "/" (teilt)



max(T) sind 8, 20, 9
max(X) = 720
min(T), min(X) sind 2, 3
grEl(T) ex. nicht
klEl(T) ex. nicht

obSchr(T) sind 360, 720
$\sup(T)=360$

inf(T) ex. nicht
unSchr(T) ex. nicht

• Falls $X'=\{1\}\cup X$, ist unSchr(T) = inf(T) = 1

• $X=\mathbb{R}$, $T=\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, wo $x_1=1$

$x_2=1.4$

$\sup(T)=\sqrt{2}$ $\quad$ $x_3=1.41$

$x_4=1.414,\ldots$

Falls $X=\mathbb{Q}$, T ebenso ⇝ $\sup(T)$ ex. nicht.

<u>Bem.:</u> klEl, min, inf analog
• T heißt beschränkt, falls obSchr(T) <u>und</u> unSchr(T) ex.