

Notiz zu L 6 6Äquivalenzrelationen

Def.: Sei X eine Menge. Eine Relation $R \subseteq X \times X$ in X heißt eine Äquivalenzrelation (hier kurz: Ä-Rel.), falls sie reflexiv

$$(7): \forall x \in X: x R x$$

$$\text{symmetrisch } (8): \forall x, y \in X: x R y \Rightarrow y R x$$

$$\text{transitiv } (9): \forall x, y, z \in X: x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$$

ist.

Notation: $\sim$ für Ä-Rel. R , z.B. $x \sim y$ für $(x, y) \in R$

Bsp.: "hat gleiche Parität wie" in $X = \mathbb{N}_0$.

$$m \sim n : (\Leftrightarrow) 2 \mid m - n$$

ist Ä-Rel.!

Def.: Die Menge aller zu $x \in X$ bzgl. $\sim$ in Relation stehender Elemente von X heißt Äquivalenzklasse (zu x).

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

$$= [4] = [2]$$

$$\text{im Bsp.: } [0] = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid y \sim 0\} = \{2m \mid m \in \mathbb{N}_0\} =: \mathcal{G}$$

$$[1] = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid y \sim 1\} = \{2m+1 \mid m \in \mathbb{N}_0\} =: \mathcal{U}$$

$\leadsto$ Zerlegung $\mathbb{N}_0 = \mathcal{G} \dot{\cup} \mathcal{U}$.

Bem.: • $x \in [x]$, denn $x \sim x$

$$\bullet \forall x, y \in X: x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$$

$$\bullet \forall x, y \in X: [x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$$

Somit: Zerlegung von X in Ä-klassen: $X = \bigcup_{x \in X} [x]$.

Def.: Sei $\sim$ eine Ä-Rel. in X . Dann heißt

$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ die Quotientenmenge von X nach $\sim$.

- Ein (jedes) $\bar{y} \in [x]$ heißt Repräsentant der Klasse $[x]$, weil dann $[y] = [x]$.

-2-

• Eine Menge $R \subseteq X$ heißt vollständiges Repr. system,
wenn R genau ein El. jeder Klasse von $X/\sim$ enthält.

im Bsp.: $\mathbb{N}_0/\sim = \{[0], [1]\} = \{[0], [1]\}$
 $= \{[2], [17]\}$
 $= \{[2], [4], [3]\}$

$R = \{0, 1\}$, $R = \{2, 17\}$ sind volls. R.systeme
 $\rightarrow$ übertragen "+", "." von $\mathbb{N}_0$ auf $\mathbb{N}_0/\sim$:

$$\begin{aligned} [0] + [0] &= [0], & [0] + [1] &= [1], & [1] + [1] &= [0] \\ [0] \cdot [0] &= [0], & [0] \cdot [1] &= [0], & [1] \cdot [1] &= [1] \end{aligned}$$

bzw. $[0] + [0] = [0]$, $[0] + [1] = [0+1] = [1]$
 $[2] + [17] = [2+17] = [19] = [1]$

$\leadsto \mathbb{N}_0/\sim$ ist Körper
 bzgl. +, ., nämlich $\mathbb{F}_2$

Bsp.: Modulo $M=12$:

$X = \mathbb{N}_0$, $m \sim n : (\Leftrightarrow) m$ und n lassen denselben Rest
 bei Div. durch 12

$$(\Leftrightarrow) 12 \mid m-n \vee 12 \mid n-m$$

Dann: $[0] = [12] = [24] \dots = \{0, 12, 24, \dots\}$
 $[1] = [13] = \dots = \{1, 13, 25, \dots\}$
 $\vdots$
 $[11] = [23] \dots$

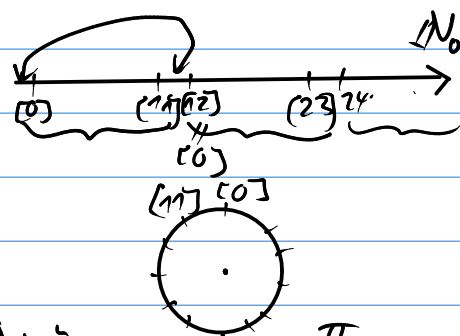
$\rightarrow \mathbb{N}_0/\sim = \{[0], [1], \dots, [11]\}$

$$[k] + [l] := [k+l]$$

$$[k] \cdot [l] := [k \cdot l]$$

z.B. $[2] + [6] = [8]$

$$[14] + [6] = [20] = [8]$$



Bem.: Nur falls $M=p$ Primzahl, erhält man (endl.) Körper.

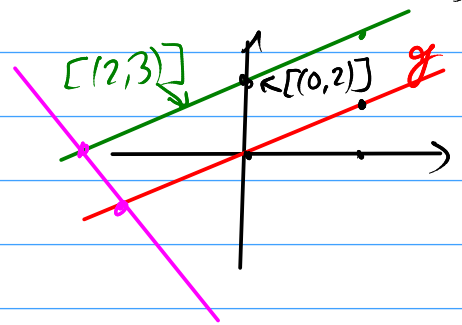
$\mathbb{F}_p$

-3-

Bsp.: im $\mathbb{R}^2$, betr. $g: y = \frac{1}{2}x$, d.h. $g = \{(x, \frac{1}{2}x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
 $= \{(2x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Für $P, Q \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P \sim Q : \Leftrightarrow P - Q \in g$$



- $(2, 1) \sim (0, 0)$
 $(3, 2) \sim (1, 1)$
 $(4, 0) \sim (0, -2), \dots$

• Ä-Klassen: $[(0,0)] = g$
 $[(2,3)] = g + (2,3) = \{(2x+2, x+3) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$\text{Allg.: } [P] = g + P = \{Q + P \mid Q \in g\} = [(0, y_P)]$$

$$\mathbb{R}^2 / \sim = \{[P] \mid P \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{P + g \mid P \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\stackrel{!}{=} \{(0, y) + g \mid y \in \mathbb{R}\} = \{[(0, y)] \mid y \in \mathbb{R}\}$$

↳ y-Achse

$$\Gamma \geq \vee, \leq : \forall P=(m,v) \forall x \exists y \exists x' :$$

$$(m,v) + (2x,x) = (0,y) + (2x',x')$$

$$\Gamma \text{ ist wahr, denn löse LGS } \begin{cases} m+2x=2x' \\ v+x=y+x' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 / \sim \cong \mathbb{R}^1$$

Bsp.: Sei V ein $\mathbb{R}$ -VR, U sei ein UVR von V .

Dann: Für $v, v' \in V$ sei $v \sim v' : \Leftrightarrow v - v' \in U$.

Ä-Klassen: $[v] = v + U = \{v + u \mid u \in U\}$

Quot.menge: $V/U := V/\sim = \{[v] \mid v \in V\}$
 $\sim \mathbb{R}$ -VR

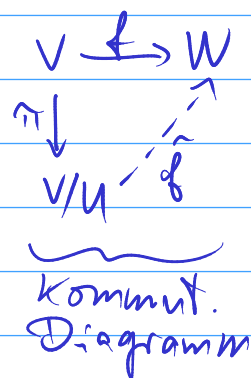
$\sim$ Quotientenvektorraum

-4-

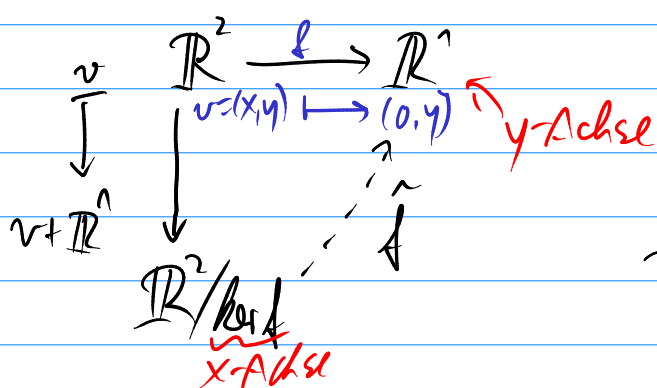
Haben kanonische

Abb.: $\pi: V \rightarrow V/U$, ist surj.
 $v \mapsto [v]$

Hom. Satz: ist $f: V \rightarrow W$ ein Hom., $U \subseteq \ker f$,
 dann gilt: $\exists \tilde{f}: V/U \rightarrow W: \tilde{f} = f \circ \pi$
 • f surj. $\Rightarrow V/\ker f \cong W$



Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}$, etwa die x-Achse,
 d.h. $U = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$



$\ker f = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$
 $\sim \mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^1 \cong \mathbb{R}^1$
 x-Achse, y-Achse

Nach allg.: $\mathbb{R}^5 / \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^2, \dots$

§2: Konstruktion der Zahlbereiche

Haben: $\mathbb{N}_0$ mit Peano-Axiomen

(1) $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / \sim$
 $\uparrow$ mit $\tilde{A}$ -Rel.

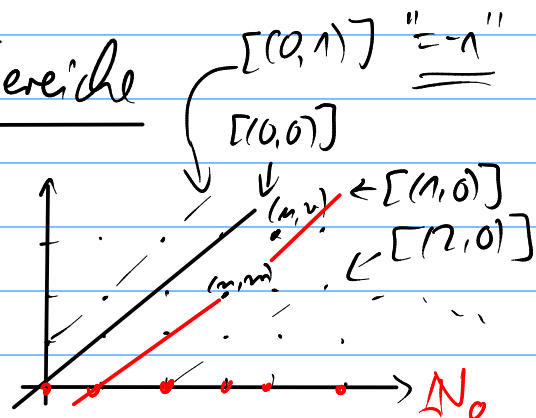
$$(m, m) \sim (n, n) : (\Leftrightarrow) m + n = m + n$$

$$[m - m] = [n - n]$$

$\mathbb{N}_0$ ist eingebettet als $\{[m, 0] \mid m \in \mathbb{N}\}$

$-m$ mit $m \in \mathbb{N}$ liegt vor als $[0, m]$,

$$\text{denn } \underbrace{[m, 0]}_m + \underbrace{[0, m]}_{-m} = [m, m] = [0, 0]_v$$



-5-

$$(2) \mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \sim$$

$$\text{mit } (z, m) \sim (y, n) : \Leftrightarrow zm = ny$$

$\mathbb{Z}$ ist eingebettet als $\{[(z, 1)] \mid z \in \mathbb{Z}\}$

Schreibe $\frac{z}{m} = [(z, m)]$

$$\text{mit } \frac{z}{m} \cdot \frac{y}{n} := \frac{zy}{nm}, \quad \frac{z}{m} + \frac{y}{n} := \frac{zm + yn}{nm}$$

$$(3) \mathbb{R} := \mathcal{C} / \sim \text{ mit}$$

$$\mathcal{C} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q} \mid \text{ist CF in } \mathbb{Q}\}$$

$$\tilde{A}\text{-Rel.: } (a_n) \sim (b_n) : \Leftrightarrow (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge}$$

$$(4) \mathbb{C} := \mathbb{R}[X] / \sim$$

$$\text{mit } \mathbb{R}[X] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i X^i \mid n \in \mathbb{N}_0, \text{ die } a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

(reelle Polynome)

und

$$f(X) \sim g(X) : \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R}[X]:$$

$$f(X) - g(X) = h(X) \cdot \underbrace{(X^2 + 1)}$$

$$\leadsto [X^2 + 1] = [0]$$

$$\begin{aligned} [X]^2 &= [X] \cdot [X] = [X^2] = [X^2 + 1 - 1] = [X^2 + 1] + [-1] \\ &= [0] + [-1] \\ &= [-1] \end{aligned}$$

$$\leadsto \mathbb{C} = \{[a_0 + a_1 X] \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{Re} & \text{Im} \end{array}$$

$$[a_0 + a_1 X] \triangleq a_0 + ia_1$$

Gewinne / Verluste bei Zahlbereichskonstruktionen:

	Gewinne	Verluste
$\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$	negative ganze Zahl → Inversenbildung bei "+"	kein kleinstes El., mehr
$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$	Stammbrüche $\frac{1}{2}$ → Inversenbildung bei "·"	0 ist nicht inv'bar
$\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$	Vollständig CF sind kgt.	komplizierte explizite Konstr. von $\mathbb{R}$
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$	Lsg. von alg. Gleichungen wie $x^2 = -1$ oder $f(x) = 0$, wo f reelles Polynom (Fundamentalsatz der Algebra)	Keine Ordnung " $\leq$ " mehr möglich
$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ Schiefkörper der Quaternionen	(keine theoret. Nutzen)	"·" ist nicht mehr kommutativ $ij = k$, aber $ji = -k$

Vertiefung zum Thema Quotienten VR / Kürze exakte Sequenzen:

Sei V ein $\mathbb{R}$ -VR, U sei ein UVR von V .

$\sim$ -Rel.: $v \sim v' : (\Leftrightarrow) v - v' \in U$

$\sim$ -Klassen: $[v] = \{v + u \mid u \in U\} =: v + U$

Quot.menge: $V/U := V/\sim = \{[v] \mid v \in V\}$

$\leadsto$ Quotientenvektorraum

Bsp.: $V = \mathbb{R}^5$, $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ mit drei lin. unabh. Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^5$.
Seien u_1, u_2, u_3 mit $v_4, v_5 \in V$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^5$ ergänzt (Basisergänzungssatz).

Haben: $\ker f = U \subseteq \mathbb{R}^5 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$, sei $f: u_1 \mapsto 0$
 $u_2 \mapsto 0$
 $u_3 \mapsto 0$
 $v_4 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $v_5 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\pi(v) := [v]$ $\mathbb{R}^5 / \ker f$

Hom. Satz: $\exists \tilde{f}$ mit $f = \tilde{f} \circ \pi$

$\leadsto \mathbb{R}^5 / \ker f \cong \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^5 / U \cong \mathbb{R}^2$

$\leadsto \dim \mathbb{R}^5 / U = 2$

Allg.: $\dim V/U + \dim U = \dim V$

Dim.-Formel für Quotienten VRe

- $\ker f = U$
- f surj.

Vgl.: Kurze exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow V' \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} V'' \rightarrow 0$$

mit α inj., $U := \underline{\text{im } \alpha} = \underline{\text{ker } \beta}$, β surj.

Dann hat man:

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{\alpha} & V & \xrightarrow{\beta} & V'' \\ & & \downarrow \pi & \nearrow \tilde{\beta} & \\ & & V/\text{ker } \beta & & \end{array}$$

" $V' \subseteq V$ "
 π
 $\tilde{\beta}$ ist Isom.
 laut Hom. Satz

$$\leadsto V'' \cong V/\text{ker } \beta (= V/\text{im } \alpha)$$

Bewiesen: $\dim V = \dim V' + \dim V''$

es folgt: $\dim V = \dim U + \dim V/U$

Fazit: • in kurzer exakter Sequenz wie hier ist
 $V'' \cong V/\text{ker } \beta$ als Quot. VR auffassbar.

• Umgekehrt liefert Quot. VR V/U die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} V/U \rightarrow 0$$

$i(u) = u$ $\pi(v) = v + U$
 " $U \subseteq V$ "

Anderes Bsp. zu Quotienten abb.:

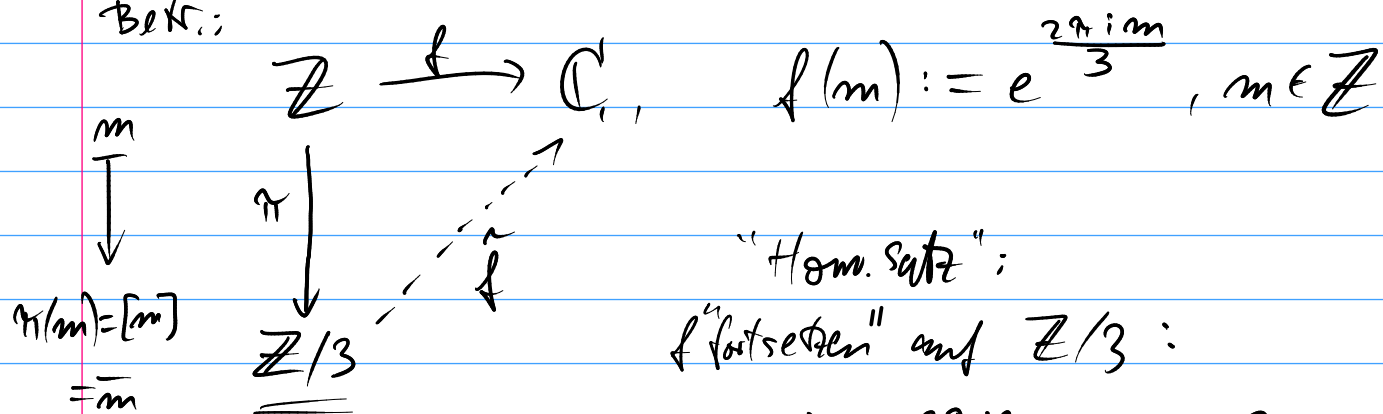
$$X = \mathbb{Z}, \quad m \sim n : \Leftrightarrow 3 \mid m - n, \quad \mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2]\}$$

bzw. $\mathbb{Z}/3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$$\bar{2} = \bar{5} = \dots$$

- 9 -

Betr.:



"Hom. Satz":

f "fortsetzen" auf $\mathbb{Z}/3$:

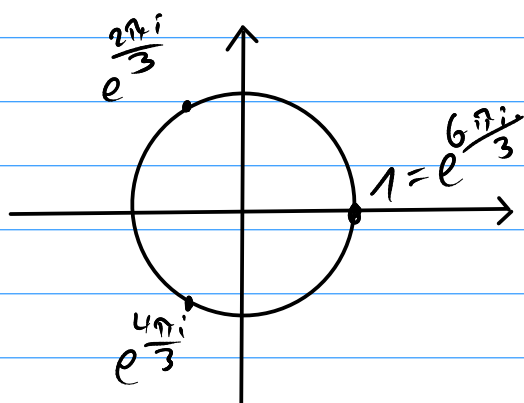
$$\tilde{f}(\bar{m}) = e^{\frac{2\pi i m}{3}}, \text{ erfüllt } \tilde{f} \circ \pi = f$$

$\tilde{f}$ ist wohldef.

$$\bar{m} = \bar{n} \Leftrightarrow m \sim n$$

$$\Leftrightarrow m = n + 3k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{2\pi i m}{3}} = e^{\frac{2\pi i n}{3}}$$



Hom. Satz hier: $\{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\} = \text{im } f \cong \mathbb{Z}/3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$\uparrow$
 Gruppeniso

$\leadsto$ Menge der 3. Einheitswurzeln mit Mult. (in $\mathbb{C}$)
 ist isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}/3, +)$

Ergänzung: Strukturtheorie

Grundstrukturen einer Menge M :

algebraische Struktur	Ordnungsstruktur	topologische Struktur
mit Verknüpfungen $+, \cdot: M \times M \rightarrow M$ (auch Skalarmult. $\rightarrow$ "äußere Verknüpfung $K \times M \rightarrow M$)	mit Ordnungsstruktur " $\leq$ " in M	mit Systemen $\mathcal{O}$ von Teilmengen von M mit bestimmten Eigenschaften dieses "offenen" Teilmengen von M
$\rightarrow$ erhalten: Gruppe, Ring, Körper, Modul, Vektorraum, ...	$\rightarrow$ erhalten: Halbordnungen, (totale) Ordnungen, ...	$\rightarrow$ allgemein Kgz. begriff
Bsp.: $(\text{Sym } X, \circ)$ ist Gruppe $(\mathbb{R}^2, +, \text{Skalarmult.})$ ist VR $\mathbb{F}_n$ ist Körper...	Bsp.: $\mathbb{N}_0$ mit " $\leq$ ", $\mathbb{Z}$ mit " $<$ " endl. Teilmengen von $\mathbb{N}_0$ mit " $\subseteq$ " $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ mit " $\leq$ "	$\rightarrow$ Stetigkeit Bsp.: $\mathcal{O} =$ Menge der offenen Intervalle in $\mathbb{R}$ • top. Strukturen von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Multiple Strukturen: • topologische Gruppen, geordnete Körper, ...

- $\mathbb{R}$ z.B. besitzt alle 3 Grundstrukturen in spezieller Form
- oft müssen die strukturprägenden Relationen verträglich sein (z.B. Distributivgesetz, Verträglichkeit " $\leq$ " mit $+, \cdot, \dots$)

Abgeleitete Strukturen:

- 1.) Unterstruktur: durch Einschränkung auf Teilmenge $N \subseteq M$
 $\rightarrow$ z.B. Untergruppe, Teilkörper, Unter VR, Teilordnung, induzierte Topologie, ...
- 2.) Produktstruktur: durch Komponentenweiser Struktur auf kartesisches Produkt $M_1 \times \dots \times M_n$
- 3.) Quotientenstruktur: Struktur von M wird auf $M/\sim$ übertragen
 $\rightarrow$ z.B. Quotienten VR V/U , z.B. $+$, $\cdot$ auf $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\sim$
 $\dots \mathbb{Z}/m \dots$

Strukturverträgl. Abb., d.h. Morphismen,
stellen Beziehungen zw. strukturierten Mengen her

→ z.B. lin. Abb. zw. VRen, Gruppenhom. zw. Gruppen,
stetige Abb. zw. top. Räumen, ...

Def.: ein bij. Morphismus heißt Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \text{z.B. } \mathbb{C} & \cong & \mathbb{R}[X]/(X^2+1) \\ \mathbb{R} + i\mathbb{R} & \uparrow & \\ & \text{Körperiso} & \end{array}$$

Spezialfall: Automorphismus: Iso von X auf sich