Notiz zu LGM

Abbildungen

Relationen in $X \times Y$

Def.: Eine linkstotale, rechtseindeutige Rel. $f \subseteq X \times Y$ heißt Abbildung,

f linkstotal $:\Leftrightarrow \forall x \in X \; \exists y \in Y : x f y$

f rechtseind. $:\Leftrightarrow \forall x \in X \; \forall y, v \in Y:$

$$\underbrace{x f y \wedge x f v \Rightarrow y = v.}_{\forall x \; \exists! y : x f y}$$

Notation: Statt $x f y$ schreibe $x \mapsto y$

oder $x \mapsto f(x)$ mit $y = f(x)$.

Statt $f \subseteq X \times Y$ schreibe: $f : X \to Y$

oder $X \xrightarrow{f} Y$ ← Bildbereich

↑ Def.bereich

Def.: $g : U \to Y$ heißt Einschränkung von $f : X \to Y$, falls $U \subseteq X$ und $g(u) = f(u)$ für alle u

Notation: $g = f|_U$

Sei $f : X \to Y$ Abb.

Def.: $A \subseteq X$, so heißt $f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \} \subseteq Y$ Bild von A

$B \subseteq Y$, so heißt $f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) = b \} \subseteq X$ Urbild von A

$f^{-1}(\{y\}) \rightsquigarrow$ gelegentl.: schreibe $f^{-1}(y)$ ⌜Faser⌟

$f(\{x\})$ ist einel., $= \{ f(x) \}$

Eigensch.: injektiv / surjektiv / bijektiv

Komposition von Abb.

Def.: $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ seien Abb.
Dann heißt $g \circ f: X \to Z$, $g \circ f(x) := g(f(x))$
die Komposition von f und g.

Reihenfolge!

Bem.: • Haben: $id_X: X \to X$, $x \mapsto x$ Identitätsabb.

• Für Abb. $f: X \to Y$ gilt $id_Y \circ f = f$ und
$f \circ id_X = f$

Def.: $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ seien Abb.
• g Rechtsinv. von f, falls $f \circ g = id_Y$
• g Linksinv. von f, falls $g \circ f = id_X$

Lemma A: f injektiv $\Leftrightarrow$ f hat Linksinverse

Lemma B: f surjektiv $\Leftrightarrow$ f hat Rechtsinverse
ist tiefer als es aussieht: brauchen Auswahlaxiom!

Beweis von Lemma B "$\Rightarrow$": Sei f surjektiv, zu jedem $y \in Y$ gibt es dann mind. ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wir wählen zu jedem y ein solches x aus und setzen $g(y) = x$.
Dann gilt nach Konstruktion $f(g(y)) = f(x) = y$, also ist g Rechtsinverse von f. $\square$

$\rightsquigarrow$ Auswahlaxiom: $X \neq \emptyset$, $P = \{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset\}$
$\Rightarrow \exists$ Fkt. $c: P \to X$, $A \mapsto c(A)$ mit $c(A) \in A$ "Auswahlfunktion"

Die Symmetrische Gruppe

Def.: Sei X eine nichtleere Menge.
Eine bijektive Abb. $f: X \to X$ heißt Permutation von X. Die Menge aller Permutationen von X heißt symmetrische Gruppe (von X), d.h.

$$\mathrm{Sym}(X) := \{ f: X \to X \mid f \text{ ist bijektiv} \}$$

Haben: $\circ$ ist eine Verknüpfung auf $\mathrm{Sym}(X)$,
d.h. $\circ : \mathrm{Sym}(X) \times \mathrm{Sym}(X) \to \mathrm{Sym}(X)$.

Bem.:
- Sind $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$, so ist auch $f \circ g \in \mathrm{Sym}(X)$ und auch $g \circ f \in \mathrm{Sym}(X)$.
- Haben $id_X \in \mathrm{Sym}(X)$ und haben $f \circ id_X = f = id_X \circ f$ für jedes $f \in \mathrm{Sym}(X)$
- Zu jedem $f \in \mathrm{Sym}(X)$ gibt es eine inverse Abb., d.h. ein $g \in \mathrm{Sym}(X)$ mit $f \circ g = id_X = g \circ f$.

$\rightsquigarrow (\mathrm{Sym}(X), \circ)$ ist Gruppe, i.a. nicht abelsche Gruppe

(Eine Gruppe $(G, *)$ heißt abelsch/kommutativ, falls $f * g = g * f$ für alle $f, g \in G$ gilt.)

Bsp.: Betr. $X = \{1, 2, 3\}$, neben id_X gibt es die Abb.

$$T_1: \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases}, \quad T_2: \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \quad T_3: \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases}$$

und

$$D_1: \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}, \quad D_2: \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Sym}(X) = \{ id_X, \underbrace{T_1, T_2, T_3}_{\text{"selbstinvers"}}, D_1, D_2 \} \quad \rightsquigarrow \not\cong (\mathbb{Z}/6, +)$$