Notiz zu LG 8

Endliche Mengen

Def.: Eine Menge X heißt endlich, falls $\exists n \in \mathbb{N}_0$ $\exists$ bijektive Abb.

$$f: \{1, \dots, n\} \to X.$$

Dann: $X = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ und $f(i) \neq f(j)$ für $i \neq j$.

Dann heißt n die Kardinalität / Mächtigkeit / Länge von X.

Notation: $\# X = n$ bzw. $|X| = n$

Def.: X heißt unendlich, wenn X nicht endlich.

Bsp.: • $\mathbb{Q}$ ist unendlich, da $\exists$ Bij. $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ (LG 9 oder später)

insb. $\neg \exists n \in \mathbb{N}_0$ $\exists$ bij. $f: \{1, \dots, n\} \to \mathbb{Q}$

• $\mathbb{N}$ ist unendlich

Bem.: • $\# X = 0 \Leftrightarrow X = \emptyset$

Def.: Zwei Mengen X und Y haben dieselbe Mächtigkeit / Kardinalität bzw. sind gleichmächtig, wenn $\exists$ bij. $f: X \to Y$.

Bem.: $X \sim Y :\Leftrightarrow X$ und Y sind gleichmächtig liefert Ä-Rel. auf der Klasse aller Menge

Def.: eine Ä-Klasse bzgl. $\sim$ heißt Kardinalzahl.

Ergebnisse über endliche Mengen

Lemma A: Seien X und Y endl. Mengen und $f: X \to Y$ sei surj. Abb. } Vor.
Wenn $\# X \leq \# Y$, dann ist f bijektiv und es gilt $\# X = \# Y$. } Beh.

Bew.: Setze $m = \# X$ und $n = \# Y$, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$.
Dann nimmt f höchstens m verschiedene Werte an, nämlich $f(x_1), \dots, f(x_m)$. Nach Vor. (f surj.) gilt $Y = \{f(x_1), \dots, f(x_m)\}$, also $m \geq n$.

- Nach Vor. $m \leq n$ folgt $m = n$.
- Würde f einen Wert mehrfach annehmen, wäre $m > n$, im Wid. zu $m = n$. Also ist f injektiv, also bijektiv. $\square$

Lemma B: Seien X und Y endl. Mengen und $f: X \to Y$ sei injektive Abb.
Wenn $\# X \geq \# Y$, dann ist f bijektiv und es gilt $\# X = \# Y$.

Korollar: Seien X und Y endl. Mengen mit $\# X = \# Y$ und sei $f: X \to Y$ eine Abb. Dann sind äquiv.:
(i) f ist bij. (ii) f ist inj. (iii) f ist surj.

Bew.: (i) $\Rightarrow$ (ii) ✓, (i) $\Rightarrow$ (iii) ✓,
$\underset{\text{Lemma B}}{(ii) \Rightarrow (i)}$, $\underset{\text{Lemma A}}{(iii) \Rightarrow (i)}$ $\square$

Bsp.: Für unendl. Mengen ist das Kor. falsch:

- $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ surj., nicht inj.

<u>Anwendungsbsp.:</u> Seien $a, b \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Def.: $T_{a,b} := \{d \in \mathbb{N};\ d|a \wedge d|b\}$

Beh.: $f: T_{a,b} \to T_{a,ak+b}$, $d \mapsto d$ ist <u>bijektiv</u>.

Bew.: • f ist wohldef.: Sei $d \in T_{a,b}$, d.h. $d|a \wedge d|b$.
Es folgt: $d|a \wedge d|ak+b$ ✓,
d.h. $T_{a,b} \subseteq T_{a,ak+b}$.

• Somit $\# T_{a,b} \leq \# T_{a,ak+b}$.

• f ist surj.: Sei $t \in T_{a,ak+b}$, d.h. $t|a \wedge t|ak+b$,
hat t als Urbild, da $t \in T_{a,b}$:
[Sei etwa $a = ta'$, $ak+b = tb'$
$\Rightarrow b = tb' - ak = tb' - ta'k = t(b' - a'k)$
$\Rightarrow t|b$]

• Nach Lemma A ist f bijektiv. $\square$

<u>Letztlich:</u> $d|a \wedge d|b \Leftrightarrow d|a \wedge d|ak+b$

Unterhaltungsmathematik:
Martin Gardner

Jetzt: <u>Kombinatorik</u>

Permutationen endlicher Mengen

Def.: Für $n \in \mathbb{N}$ heißt

$$S_n := \mathrm{Sym}(\{1,2,\dots,n\})$$
$$= \{\sigma : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} ;\ \sigma \text{ bijektiv}\}$$

die symmetrische Gruppe von $\{1,\dots,n\}$.
Die Elemente von S_n heißen Permutation.

Bem.: • ist $\# X = n$, dann ist $\mathrm{Sym}(X)$ isomorph zu S_n.

Bsp.: $S_2 = \{ id_{\{1,2\}}, \tau \}$ mit $\tau(1)=2$, $\tau(2)=1$

Bsp. $S_3 = \{ id_{\{1,2,3\}}, T_1, T_2, T_3, D_1, D_2 \}$

$T_1 : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 3$ $\quad T_2 : 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 1$ $\quad T_3 : 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 2$

$D_1 : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 1$ $\quad D_2 : 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 2$

Andere Notation: $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \dots$

Zykel-Notation: $T_1 = (1\,2)$, $T_2 = (1\,3)$, $T_3 = (2\,3)$

$$D_1 = (1\,2\,3),\ D_2 = (1\,3\,2)$$

1. Satz: $\forall n \in \mathbb{N}$: $\# S_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Bew.: Nach Kor. genügt es, die injektiven Abb. $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ zu zählen. Für $\sigma(1)$ gibt n Mögl., für $\sigma(2)$ bleiben $n-1$ Mögl., für $\sigma(3)$ gibt $n-2$ Mögl. …, für $\sigma(n)$ noch 1 Mögl. Insg.: $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ viele Mögl. $\square$

Bsp. in S_9: schreiben El. als $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 9 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(9) \end{bmatrix}$

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & \underset{\uparrow\text{Fixpunkt}}{4} & 3 & 8 & 5 & 9 & 6 \end{bmatrix} \in S_9$$

Bsp. für Zykelschreibweise: $\tau = (1\,2)(3\,7\,5)(6\,8\,9)$

$$\tau^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 & 3 & 8 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 & 9 & 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\tau^{-1} = (1\,2)(3\,5\,7)(6\,9\,8)$$

$$\left[\begin{aligned} &(1\,2)(2\,3) \\ &= (1\,2\,3) \end{aligned}\right]$$

$$\tau^6 \underset{\substack{\text{Zyklen} \\ \text{elementfremd}}}{=} (1\,2)^6(3\,7\,5)^6(6\,8\,9)^6$$

$$= id_{\{1,\dots,9\}}$$

2. Satz: $\forall n \in \mathbb{N}_0: \# X = n \Rightarrow \# \mathcal{P}(X) = 2^n$

Erinnerung: $\mathcal{P}(X) = \{T \subseteq X\}$

Bew.: (Vollst. Ind.): $n=0$: $X = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(X) = \{\emptyset\} \Rightarrow \# \mathcal{P}(X) = 1 = 2^0$ ✓

$n \to n+1$: Sei $\# X = n+1$ und $x \in X$.

Dann $\mathcal{P}(X) = \underbrace{\{T \subseteq X \mid x \in T\}}_{\text{hat } 2^n \text{ viele El.}} \cup \underbrace{\{T \subseteq X \mid x \notin T\}}_{\text{hat } 2^n \text{ viele El.}}$

nach Ind.-Vor.,

also $\# \mathcal{P}(X) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ ✓. □

3. Satz: Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. Dann:

$$\# X = n \Rightarrow \# \{T \subseteq X \mid \# T = k\} = \binom{n}{k}.$$

[Erinnerung: $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\rightsquigarrow \forall 1 \leq k \leq n: \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ Formel vom Pascal-△

mit $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$]

Bew. idee: Benutze Pascal-Δ-Formel in vollst. Ind. über n, um 3. Satz zu zeigen.

z.B: Zahlenlotto $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!} = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

$= 13.983.816$

$\rightsquigarrow$ Kombinatorische Deutung von $\binom{49}{6}$:
im Zahlenlotto "6 aus 49" ist die Gewinnwahrscheinlichkeit
$1 : \binom{49}{6}$, d.h. $\frac{1}{13.983.816} = 7.15\ldots \cdot 10^{-8}$
$= 0.0000000715\ldots$