

Notizen zu LG 9

$$\bullet S_m = \{ \text{bij. Abb. } \sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\} \}$$

$$\#S_m = \underline{\underline{m!}}$$

$$\bullet \text{ Weiter: } \#T = m \Rightarrow T \text{ hat } 2^m \text{ viele Teilmengen,} \\ \text{m.a.W.: } \# \mathcal{P}(T) = \underline{\underline{2^m}}$$

$$\bullet \text{ Binomialkoeff.: } \#T = m$$

$$\text{Dann: } \# \{ X \subseteq T \mid \#X = k \} = \binom{m}{k}$$

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1, \quad \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \underline{\underline{\binom{m+1}{k}}}$$

$\binom{m}{k}$	$m \backslash k$	0	1	2	3		
0		1					
1		1	1				
2		1	2	1			
3		1	3	3	1		
4		1	4	6	4	1	
5		1	5	10	10	5	1
		:	:	:	:	:	:

Pascalsches Δ

Binomischer Satz:

$$(x+y)^m = \underbrace{(x+y) \cdots (x+y)}_{m\text{-mal}} = \sum_{Z \subseteq \{1, \dots, m\}} x^{\#Z} y^{m-\#Z}$$

$$= \sum_{k=0}^m \left(\sum_{\substack{Z \subseteq \{1, \dots, m\} \\ \#Z = k}} 1 \right) x^k y^{m-k} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k y^{m-k}$$

(↑ mögl. Auswahl von Faktoren im Produkt $(x+y) \cdots (x+y)$, wo Summand "x" zum Ansk. multipl. genommen wird)

Multinomialatz:

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0 \\ \text{mit } k_1 + \dots + k_r = n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

$$\left(\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \right)$$

Große Zahlen

Minuten pro Woche: $7 \cdot 24 \cdot 60 = 10.080 \approx 10^4$

Mögl., ein 3×3 -Feld in 3 Farben anzumalen: $3^9 = 19.683 \approx 2 \cdot 10^4$

Stunden in 114 Jahren: $\approx 10^6$

Erdumfang: $40.070 \text{ km} \approx 4 \cdot 10^7 \text{ m}$

9-buchstellige Wörter mit 26 Buchst.: $26^9 \approx 5.43 \cdot 10^{12}$

allg.: N El. auf M Plätze: Anz. Mögl. ist N^M

$$a^m = \left(10^{\log_{10} a} \right)^m = 10^{\frac{\log a}{\log 10} \cdot m}$$

Mögl., ein Schachbrett schwarz/weiß zu färben:

$$2^{64} \approx 18.5 \cdot 10^{19}$$

Avogadro-Konstante: $\approx 6.02 \cdot 10^{23}$

Atome in der Erde: $\approx 10^{50}$

Mögl., 48 Punkte auf irgendeine Art zu verbinden: $\approx 10^{61}$

Atome im beobachtbaren Universum: $\approx 10^{80}$

-3-

Die Zahl 10^{100} (10 Sexdezilliarden) heißt auch
1 Googol (engl.)

Mögl., ein 10×10 -Quadrat mit 10 zu bemalen: 10^{100}
verschiedener QR-Codes:
 $2^{23.648} \approx 10^{7119}$

größte numerisch bekannte PZ: (GIMPS)

$2^{74.207.281} - 1$ mit 22.338.618 vielen
Dezimalstellen

Exponentialtürme: $10^{10^{100}} = 10^{(10^{100})} = 10^{10^{10^2}}$

[vgl.: $(10^{10})^{100} = 100^{100}$]

Skewes-Zahl: $10^{10^{10^{34}}}$

S. Skewes 1933: $\int_2^x \frac{dt}{\log t} - \pi(x)$ hat VZwechsel
vor $10^{10^{10^{34}}}$

aktuell: $\approx 1.4 \cdot 10^{316}$

Unendlich große Mengen

Unendlichkeitsaxiom: $\mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_0$) ist unendl. große
Menge,

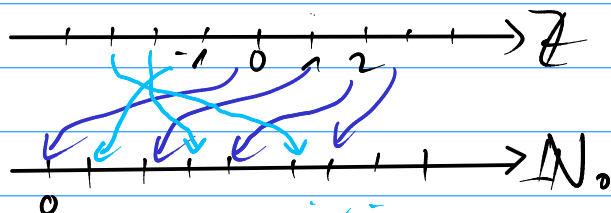
d.h., dass es für kein $m \in \mathbb{N}$ eine
Bijektion $f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt.

Def.: Eine Menge X heißt abzählbar,
wenn es eine injektive Abb. $X \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt.

Eine Menge X heißt abzählbar unendlich,
wenn X abzählbar und unendl. ist.

Bsp.: • jede endl. Menge ist abzählbar, $\mathbb{N}_0$ ist abzählbar unendl.

• $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0, f(z) := \begin{cases} 2z, & z \geq 0 \\ -(2z+1), & z < 0 \end{cases}$



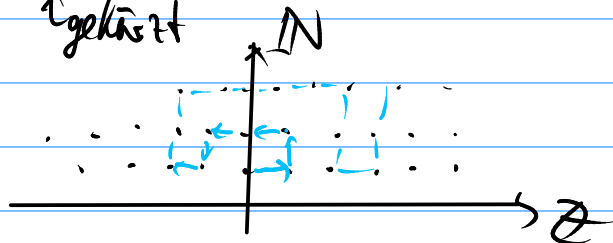
f injektiv ✓

• $\mathbb{Q}$ ist abzählbar: finde Injektion $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}_0$

$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

$\frac{a}{b} \mapsto (a, b)$ ist injektiv,
↗ gekürzt

Schaffe
Bijektion $h: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$
hinterher



$\rightarrow h \circ f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ inj.

$h:$ $(0,1) \rightarrow (0,2) \rightarrow (0,3) \rightarrow \dots$
 $(1,1) \leftarrow (1,2) \leftarrow (1,3) \leftarrow \dots$
 $(-1,1) \leftarrow \dots$
 $(2,1) \leftarrow \dots$

1. Cantorsches
Diagonalverfahren

1. Lemma: Eine unendl. Menge X ist genau dann abzählbar,
wenn es eine bij. Abb. $g: X \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt.

Def.: Eine Menge M , die nicht abzählbar ist, heißt überabzählbar.

2. Lemma: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{M \subseteq \mathbb{N}\}$ ist überabzählbar.

Bew.: Nach dem Lemma von Cantor kann es keine Bij. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ geben.
Nach 1. Lemma ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dann überabzählbar. $\square$

Lemma von Cantor: X Menge $\Rightarrow$ es gibt keine surjektive Abb. $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

$\neg \exists f: X \rightarrow \mathcal{P}(X) \text{ surj.} \Leftrightarrow \forall f: X \rightarrow \mathcal{P}(X): f \text{ nicht surj.}$

Bew.: Sei $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ eine Abb.

f ordnet jedem $x \in X$ eine Teilmenge von X zu
d.h. $f(x) \in \mathcal{P}(X)$.

Setze $A := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$.

Dann hat kein Urbild unter f ,

d.h. es ex. kein $x \in X$ mit $f(x) = A$.

Denn: • Für $x \in A$ ist $x \notin f(x)$, also $f(x) \neq A$ weil $x \in A \setminus f(x)$.

• Für $x \in X \setminus A$ ist $x \in f(x)$, also $f(x) \neq A$

Wäre $f(x) = A$, müsste für $x \in f(x) = A$

dann $x \notin f(x)$ sein $\hookrightarrow$

Also: f ist nicht surj.

$\square$

Satz: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Bew.: Ziel: konstr. inj. $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$

Ist $A \subseteq \mathbb{N}$, def. $\chi_A: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$, $j \mapsto \begin{cases} 1, & j \in A \\ 0, & j \notin A \end{cases}$

Def. $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto h(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \chi_A(j) \cdot 10^{-j}$
 $= 0, \underbrace{\chi_A(1)} \underbrace{\chi_A(2)} \dots \in \mathbb{R}$

• Kge. der Reihe klar: $0 \leq h(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1 = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$ ✓

• Eind. der Darst. (Inj. von h):

$$\begin{aligned} h(A) = h(B) &\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \chi_A(j) 10^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_B(j) 10^{-j} \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} (\underbrace{\chi_A(j) - \chi_B(j)}_{\in \{-1,0,1\}}) \cdot 10^{-j} = 0 \end{aligned}$$

Ann.: k minimal mit $\chi_A(k) \neq \chi_B(k)$

$$\begin{aligned} \text{Dann: } 10^{-k} &= |\chi_A(k) - \chi_B(k)| \cdot 10^{-k} \\ &= \left| \sum_{j \geq k+1} (\chi_B(j) - \chi_A(j)) \cdot 10^{-j} \right| \leq \sum_{j \geq k+1} 10^{-j} \\ &= \dots = 10^{-k} \cdot \frac{1}{9} \quad \downarrow \end{aligned}$$

Also sind alle $\chi_A(k) = \chi_B(k)$, also $A = B$. □

2. Cantorsches Diagonalverfahren:

Wäre $\mathbb{R}$ abzählbar, dann $[0,1]$ abzählbar.

Angenommen, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ wäre Aufzählung von $[0,1]$, d.h.

$$\alpha_1: 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots$$

$$\alpha_2: 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots$$

$$\alpha_3: 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots$$

Betr.

$$\beta = 0, b_1 b_2 b_3 \dots \in \mathbb{R}$$

$$b_i = \begin{cases} 1, & a_{ii} \neq 1 \\ 2, & a_{ii} = 1 \end{cases}$$

Also $\beta \neq \alpha_1$ da $b_1 \neq a_{11}$

$\beta \neq \alpha_2$ da $b_2 \neq a_{22}$

Also β nicht in Aufzählung $\square$

2. Cantorsches Diagonalverfahren

Hilberts Hotel

Hotelgäste: $h_1^1 h_2^2 h_3^3 \dots$

neue Gäste: $g_1 g_2 g_3 \dots$
 $\hookrightarrow 1 \hookrightarrow 3 \hookrightarrow 5 \dots$

Busse

$$b_1: g_{11} \rightarrow g_{12} g_{13} \dots g_{1i} \rightarrow 3^i$$

$$b_2: g_{21} g_{22} g_{23} \dots g_{2i} \rightarrow 5^i$$

$$b_3: \dots g_{3i} \rightarrow 7^i$$

$$h_1 \rightarrow 2, h_2 \rightarrow 4, h_3 \rightarrow 6$$

$$g_{mi} \mapsto p_{m+i}^i$$

$(p_m \sim m \log m)$ laut Primzahlsatz