-1-

Zu LG10

§1: Lemma von Zorn

Def.: Ist M bzgl. $\leq$ (halb-)geordnet, so heißt eine bzgl. $\leq$ totalgeordnete Teilmenge $T \subseteq M$ eine Kette.

Bsp.:

$$\begin{array}{ccc} \{1,4,5\} & & \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \\ \{1,4\} & & \{1,3\} \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ & \{1\} & \end{array}$$

$M = \{\{1\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,4,5\}\}$ ist bzgl. "$\subseteq$" geordnet.

$K = \{\{1\}, \{1,4\}, \{1,4,5\}\}$ ist längste Kette in M.

Lemma von Zorn:
Sei $M \neq \emptyset$ mit Ordnung $\leq$ so, dass jede Kette eine obere Schranke in M hat.
[$\forall$ Ketten $T \subseteq M$ $\exists s \in M$ $\forall y \in T: y \leq s$]
$\Rightarrow$ Dann hat M (mind.) ein maximales Element.

→ [Bew. mit Auswahlaxiom und Fixpunktsatz von Bourbaki, s. später]

Konsequenz:

SATZ: Jeder Vektorraum V hat eine Basis.
(↑ zum Körper K)

Bem.: Wegen der Verwendung des Auswahlaxioms im Beweis ist es i.a. nicht möglich, konkrete Basen in beliebigen Vektorräumen explizit anzugeben.

Aus Lin. Alg. I: $S \subseteq V$ ist Basis $\Leftrightarrow$ S ist maximale lin. unabh. Teilmenge von V, d.h. S ist lin. unabh. und jede Obermenge von S lin. abh.

$M = \{S \subseteq V \mid S \text{ lin. unab.}\}$ ist geordnet bzgl. "$\subseteq$".
$\rightsquigarrow$ Basis ist ein maximales Element von M

Beweis des Satzes:

Sei $M = \{S \subseteq V \mid S \text{ lin. unab.}\}$ ist geordnet bzgl. "$\subseteq$".
Gen. z.z.: $\exists$ max. El. von M, dieses ist Basis.
Verwende dafür Lemma von Zorn, überprüfe, ob die Vor. im Lemma von Zorn erfüllt sind, d.h.
z.z. ist $T \subseteq M$ total geordnete Teilmenge von M, so gibt es eine lin. unabh. Teilmenge $S \subseteq V$ mit $S' \subseteq S$ für alle $S' \in T$.

Setze: $S := \bigcup_{S' \in T} S'$, dann gilt $S' \subseteq S$ für alle $S' \in T$.

Es bleibt z.z.: S ist lin. unabh., d.h. $S \in M$.

Dazu seien $v_1, \dots, v_n \in S$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ ggf. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$.

Jedes v_i liegt in einem $S_i \in T$.
Da T Kette ist, gilt nach Umnummerierung
$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_n$, also sind $v_1, \dots, v_n \in S_n$.

Da S_n lin. unabh., folgt aus $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ bereits, dass alle $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Also ist S lin. unabh.

Also ex. nach dem Lemma von Zorn maximale El. in M, also Basen. $\square$

§2: Beweis des Lemmas von Zorn

Def.: Für $f: S \to S$ heißt $s \in S$ Fixpunkt, falls $f(s) = s$.

Fixpunktsatz von Bourbaki (unabh. vom Auswahlaxiom):
Ist S eine bzgl. $\leq$ geordnete Menge $\neq \emptyset$, in der jede Kette ein Supremum in S besitzt. So hat jede Abb. $f: S \to S$ mit $f(x) \geq x$ für alle $x \in S$ einen Fixpunkt $s \in S$, d.h. $f(s) = s$.

(Aufwändiger direkter Beweis)

Beweis des Lemmas von Zorn:
Sei dazu $M \neq \emptyset$ eine geordnete Menge.

Betr. das System $S \subseteq \mathcal{P}(M)$ aller Ketten von M, S ist bzgl. "$\subseteq$" geordnet, also: $S = \{K \subseteq M \mid K \text{ Kette}\}$.

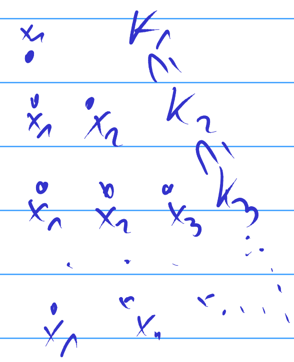
Beh.: Jede Kette in S hat ein Supremum in S.
Bew.: Das Supremum über ein totalgeordnetes System $\mathcal{J} \subseteq S$ von Ketten ist die Vereinigung

$$\bigcup_{K \in \mathcal{J}} K = \sup \mathcal{J} \quad (\text{ist Kette von } M, \text{ also } \in S).$$

Also: die Vor. des Fixpunktsatzes ist erfüllt.

Def.: $f: S \to S$,

$$K \mapsto f(K) := \begin{cases} K \cup \{x\}, & \text{falls } \exists x \notin K: K \cup \{x\} \text{ Kette}, \\ K, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Hier setzen wir das Auswahlaxiom ein, um für alle K unter den jeweils möglichen x eines auszuwählen.

Nach dem Fixpunktsatz hat f einen Fixpunkt,

d.h. es gibt also eine maximale Kette $K_{max} \subseteq M$.

Eine obere Schranke einer solchen maximalen Kette
(ex. nach Vor. des Lemmas von Zorn)
ist dann notwendig ein maximales Element von M. $\square$