# Repetitorium Analysis 1 – Stoffwiederholung + Vertiefung / Beispiele + Aufgaben

## §4: Funktionen

Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften: (nur Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$)

| | Funktion + Name | Eigenschaften | | Umkehrfunktion |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ Potenz | mon. w. für $x \geq 0$ Umkehrung ex. meistens nur für $x \geq 0$ | gerade für $r \in \mathbb{Z}$ gerade, ungerade für $r \in \mathbb{Z}$ ungerade | $g(x) = x^{\frac{1}{r}}$ (Wurzeln) |
| 2. | $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ rationale Funktion | $a$ Pol, falls $Q(a) = 0 \neq P(a)$ | | ex. nicht immer |
| 3. | $f(x) = \exp(x)$ Exponentialfunktion | $D = \mathbb{R}$, streng mon. w., Abl. ist $f(x) = \exp(x)$ selbst | $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ | |
| 4. | $f(x) = \log x$ Logarithmusfunktion | $D = \mathbb{R}_{>0}$, s.m.w. | | |
| 5. | $f(x) = \sin x, \cos x, \tan x$ Sinus, Cosinus, Tangens, und ihre Umkehrfunktionen | | $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ $\log(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$ | |

Polynome → $P, Q \in \mathbb{R}[X]$

Liste von speziellen Funktionen mit besonderen/bemerkenswerten Eigenschaften:

$\lfloor x \rfloor$, $|x|$, $x^3$, ...

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Maximum (lokal/global): lokales Max. bei $c \in D$: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in ]c-\varepsilon, c+\varepsilon[: f(x) \le f(c)$

globales Max. bei $c \in D$: $\forall x \in D: f(x) \le f(c)$

Monotonie: $f$ monoton $\Leftrightarrow$ $f$ m.w. oder m.f.

$f$ m.w. $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in D, x < y: f(x) \le f(y)$

Beschränktheit: $\exists C > 0: \forall x \in D: |f(x)| < C$

zusammensetzen mit Verknüpfung (Hintereinanderschaltung)
und Linearkombinationen
und Fallunterscheidung bzw. Definitionsbereich

Bsp.: $f(x) := \begin{cases} 1, & x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$

Funktionen an bestimmten Stellen des Def.bereichs untersuchen:

Häufungspunkt einer Folge: GW einer konvergenten Teilfolge, bzw. ein $a \in \mathbb{R}$ so, daß in jeder $\varepsilon$-Umg. unendlich viele $a_n$ liegen

Häufungspunkt einer Menge $X$: ein $a \in \mathbb{R}$ so, daß es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $X \setminus \{a\}$ gibt mit $x_n \xrightarrow{n \to \infty} a$

Def. des lim einer Fkt. / Funktionsgrenzwert: $f: D \to \mathbb{R}$

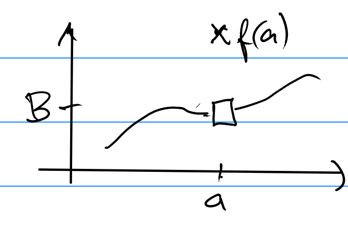
$B = \lim_{x \to a} f(x) :\Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \to a: f(x_n) \to B$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x \in X: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$

auch: Links- und Rechtsseitiger GW:

Linksa.: Schränke $f$ ein auf $D^- = \{x \in D; x < a\}$

$\lim_{x \to a} f(x) = B$:



Notation: $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ rechtsseitig, $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ linksseitig

Bestimmung von Grenzwerten:

- mit GW-Sätzen, vgl. Aufgabe 2.1

- Regel von de l'Hôpital
  zur Bestimmung von Grenzwerten:
  $f, g: ]a,b[ \to \mathbb{R}$ diff'bar, $\forall x \in ]a,b[: f'(x) \neq 0$,
  $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0.$
  Dann: $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\Big\}$ auch in Version $a = \infty$ oder $a = -\infty$

## §5: Stetigkeit

$f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D$

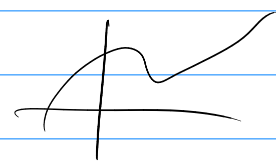
(Folgenstetigkeit:) $f$ heißt in $a$ <u>stetig</u>, falls $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

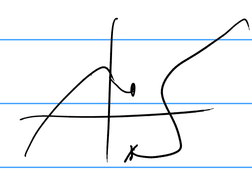
bzw. $\forall x_n \to a: f(x_n) \to f(a)$

($\varepsilon$-$\delta$-Stetigkeit:) $f$ heißt in $a$ <u>stetig</u>,
falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D: |x - a| < \delta$
$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Mit („Folgen") Stetigkeit:

„$f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$"

stetig: 

unstetig: 

## Sätze über Stetigkeit:

ZWS: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0 < f(b)$
$\Rightarrow \exists c \in ]a,b[ : f(c) = 0$

Zwischenwertsatz

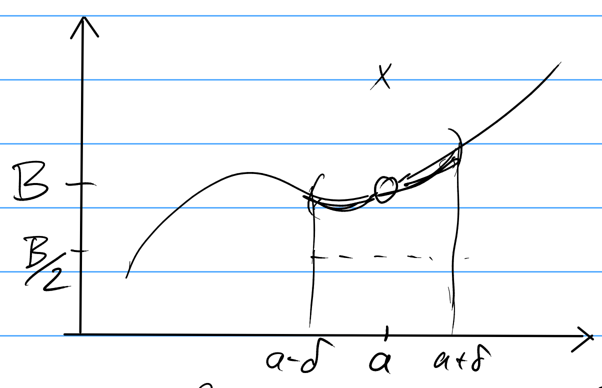
Aufg.: Geg. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, nimmt $f$ den Wert $B$ an?
Lösung: Def. $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - B$, teste ob $g$ Nullstelle hat mit ZWS

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in ]a,b[$.

- $f$ in $x_0$ stetig $\Leftrightarrow$ Links- und rechtsseitiger GW ex. und ist gleich $f(x_0)$
- $f$ stetig $\Rightarrow$ $f$ nimmt Supremum als Maximum an
  d.h. $\exists c \in ]a,b[ : \sup\{f(x);\ x \in [a,b]\} = f(c)$.
- $f$ monoton st. Dann: $f$ stetig $\Leftrightarrow$ $f([a,b])$ = IV mit Randpunkten $f(a)$ und $f(b)$
- $f$ stetig $\Rightarrow$ $f([a,b])$ auch ein IV $[c,d]$

---

Skizze zu Aufg. 4.2:




$\pi := \min\{x > 0;\ \cos x = 0\}$
$\rightsquigarrow$ sin, cos sind $2\pi$-periodisch,
$\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, $k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x + 2\pi \cdot k) = \cos x$, $k \in \mathbb{Z}$
Es ist: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$