Repetitorium Analysis 1 – Stoffwiederholung + Vertiefung / Beispiele + Aufgaben (Teil 6 + 7)

§6: Differenzierbarkeit

$f: D \to \mathbb{R}$, D offenes IV, $a \in D$

f in a diff'bar $:\Leftrightarrow$ $f'(a) := \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (d.h. lim existiert)

$\Leftrightarrow$ $f'(a) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (d.h. lim existiert)

$\Leftrightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R}$, $\varphi: D \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$: $f(x) = f(a) + c(x-a) + \varphi(x)$ ⚠ vgl. Ana 2

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ heißt Differenzenquotient, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ heißt Differentialquotient bzw. Ableitung

f diff'bar $:\Leftrightarrow$ $\forall a \in D$: f in a diff'bar

f stetig diff'bar $:\Leftrightarrow$ f diff'bar und f' stetig $\rightsquigarrow$ (C^1-Fkt.)

Rechenregeln für Ableitung: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Produktregel:	$(f \cdot g)' = f'g + fg'$	• $\sin' = \cos$
Quotientenregel:	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	• $\cos' = -\sin$
Kettenregel:	$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$	• $\exp' = \exp$
Abl. der Umkehrfkt.:	$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$	

⌜**Bsp.:** $\log'(y) = \dfrac{1}{\exp'(\log y)} = \dfrac{1}{\exp(\log y)} = \dfrac{1}{y}$ ⌟

• f diff'bar in a $\Rightarrow$ f stetig in a (nicht „$\Leftarrow$", vgl. $f(x) = |x|$)

Satz von Rolle: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff'bar, $f(a)=f(b)$
$\Rightarrow \exists c\in\,]a,b[\,: f'(c)=0$

MWS: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff'bar $\Rightarrow \exists c\in\,]a,b[\,: f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
(Mittelwertsatz)

Korollar: $\forall x\in\,]a,b[\,: f'(x)=0 \Rightarrow \exists c\in\mathbb{R}\ \forall x\in\,]a,b[\,: f(x)=c$,
d.h. f konstant

Monotonie: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff'bar,
$\forall x\in\,]a,b[\,: f'(x)>0 \Rightarrow f$ s.m.w. (nicht "$\Leftarrow$", Bsp. x^3)
" $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow f$ m.w.
" $f'(x)<0 \Rightarrow f$ s.m.f. (nicht "$\Leftarrow$", Bsp. $-x^3$)
" $f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow f$ m.f.

Extrema und Abl.:
notwendig
nicht hinreichend
- f in x_0 diff'bar und f in x_0 lokales Extremum (Min. oder Max.) $\Rightarrow f'(x_0)=0$
$\not\Leftarrow$
- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zweimal diff'bar in $x_0\in\,]a,b[$,
$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Rightarrow f$ hat lokales Minimum in x_0
(Bsp.: $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$, $\underbrace{f''(x)=2}_{>0}$)

Konvexe Fkt.:
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konvex $:\Leftrightarrow$
$\forall x,y\in[a,b]\ \forall\lambda\in[0,1]:$
$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
- f konkav $:\Leftrightarrow -f$ konvex
- f konvex in $]a,b[\ \Rightarrow f$ stetig in $]a,b[$

Bsp.: x^2
- Sei $\underbrace{f \text{ zweimal stetig diff'bar auf } [a,b]}$ Dann: f konvex $\Leftrightarrow f''>0$ in $]a,b[$
d.h. $f\in C^2([a,b]) :\Leftrightarrow f$ zweimal diff'bar & f'' stetig

§7: Riemann-Integrale

1. **Def.:** Eine Unterteilung eines Intervalls $I=[a,b]$, $a<b$, ist eine endl. Folge $T=(x_0,x_1,\dots,x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, mit $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$.

2. **Def.:** Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschr. und $T=(x_0,\dots,x_n)$ eine Unterteilung, und $m_k := \inf\{f(x) \mid x\in[x_{k-1},x_k]\}$, $M_k := \sup\{f(x)\mid x\in[x_{k-1},x_k]\}$.
Die Zahl $u(T) := \sum_{k=1}^{n} m_k (x_{k-1}-x_k)$ heißt Untersumme,

und $o(T) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_{k-1}-x_k)$ heißt Obersumme
von f bzgl. der Unterteilung T.

3. **Def.:** Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschr., $\mathcal{J}$ die Menge aller Unterteilungen von $[a,b]$.
Dann heißt $\int_a^{b*} f(x)dx := \sup\{u(T)\mid T\in\mathcal{J}\}$ unteres (Riemann-)integral,

$\int_{a*}^{b} f(x)dx := \inf\{o(T)\mid T\in\mathcal{J}\}$ oberes (Riemann-)integral.

4. **Def.:** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschr. heißt (Riemann-)integrierbar,
falls
$$\int_{a*}^{b} f(x)dx = \int_a^{b*} f(x)dx \text{ gilt.}$$
Dieser Wert heißt (Riemann-)integral von f auf $[a,b]$ und wird mit
$$\int_a^b f(x)dx \text{ notiert.}$$
f heißt Integrand

- f auf $[a,b]$ stetig $\Rightarrow$ f auf $[a,b]$ int'bar
- f monoton auf $[a,b]$ $\Rightarrow$ f auf $[a,b]$ int'bar
- f auf $[a,b]$ int'bar, $[c,d]\subseteq[a,b]$ $\Rightarrow$ f auf $[c,d]$ int'bar

Das R-Integral als GW von Rechtecksummen:

5. **Def.:** Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschr., $T=(x_0,\dots,x_n)$ eine Unterteilung von $[a,b]$,
$\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ mit $\underline{\xi_k}\in[x_{k-1},x_k]$.
Dann heißt

$$\sigma(T,\xi):=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

eine Riemann-Summe bzgl. T und ξ.

Bsp.: Unterteilung, die "äquidistant" ist, d.h. alle x_k-x_{k-1} gleich:
T: $x_0=a,\ x_1=a+\Delta,\ x_2=a+2\Delta,\dots,x_n=a+n\Delta=b$
mit $\Delta:=\frac{b-a}{n}$. Mit $\xi_k:=x_{k-1}$ wird

$$\sigma(T,\xi)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\cdot\Delta$$

Beachte: $\Delta=\Delta(n)$

Für monoton steigendes f ist
hier $\sigma(T,\xi)$ gerade die Untersumme $u(T)$.

6. **Def.:** Ist $T=(x_0,\dots,x_n)$ eine Unterteilung von $[a,b]$,
so heißt $|T|:=\max\{x_k-x_{k-1}\mid 1\le k\le n\}$ die Feinheit von T.

Es gilt: • $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ int'bar $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{|T|\to0}\sigma(T,\xi)$,
(ohne Beweis)

d.h. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T=(x_0,\dots,x_n)$ Unterteilung von $[a,b]$, $|T|<\delta$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^n, x_{k-1}\le\xi_k\le x_k$:

$$|Z|<\delta\Rightarrow\left|\sigma(T,\xi)-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

Bsp.: $[a,b]=[0,1]$, $\Delta=\frac1n$, $\xi_k:=\frac kn=x_k \rightsquigarrow \frac1n\sum_{k=1}^n f\left(\frac kn\right)\xrightarrow{n\to\infty}\int_0^1 f(x)dx$

Etwa: $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2 \rightsquigarrow \frac1n\sum_{n=1}^{n}\left(\frac kn\right)^2=\frac{1}{n^3}\underbrace{\sum_{k=1}^n k^2}_{=\frac16 n(n+1)(2n+1),\text{ vollst. Ind.}}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\to\underline{\underline{\frac13}}.$

Rechenregeln für Integrale:

- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$,
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b (f \pm g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- f, g auf $[a,b]$ int'bar, $\forall x \in [a,b]: f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

- f, g auf $[a,b]$ int'bar $\Rightarrow \max(f,g), \min(f,g), |f|$ ebenso,

  und $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$,

- MWS der $\int$-Rechnung: f in $[a,b]$ stetig $\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$:
  $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b-a)}$$

  auch: f in $[a,b]$ stetig, g int'bar $\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$:
  $$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx}$$

Die Stammfunktion

7. Def.: I ein IV, $f: I \to \mathbb{R}$. Dann heißt jede Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ mit $\forall x \in I: F'(x) = f(x)$ eine Stammfunktion von f.

- F, G S.F. von $f \Leftrightarrow \exists\, C \in \mathbb{R}\ \forall x \in I: F(x) = G(x) + C$

$\ulcorner$ $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0 \Rightarrow F - G$ ist konstant $\lrcorner$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann:

(1) f besitzt eine S.F. F auf $[a,b]$, nämlich $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$

(2) Für jede S.F. F gilt: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$ $\left(=: F(x)\big|_a^b\right)$

Bsp.: $f(x) = x^2$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ist S.F. $\rightsquigarrow \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Partielle Integration: $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Dann:

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$

Bsp. für $\lambda \neq -1$, $0 < a < b$:

$$\int_a^b x^\lambda \log x\,dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\log x\Big|_a^b - \int_a^b \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \ldots$$

Speziell $\lambda = 0$: $\int_a^b \log x\,dx = (x\log x - x)\big|_a^b$

Integration durch Substitution:

Sei f stetig auf $[a,b]$, $\varphi \in \mathcal{C}^1([u,v])$ mit $\varphi([u,v]) \subseteq [a,b]$, $\varphi(u) = a$, $\varphi(v) = b$. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_u^v f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

Bsp.: • $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^{\pi/2} \sin t\cdot\cos^2 t\,dt$

Subst. $x = \sin t = \varphi(t)$, $\varphi'(t) = \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$

• $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\cdot\sin t\,dt \underset{\uparrow}{=} -\int_1^0 x^2\,dx = -\frac{1}{3}x^3\Big|_1^0 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Subst. $x = \cos t$