Lösungen zu den Repetitoriumsaufgaben Analysis 1
(Teile 1+2)

Aufgabe 1.1

(a) Schreiben Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen:

(i) Vor.: $A=\{x\in\mathbb{R};\ |x+2|<|x-5|\}$,

Beh.: $A=(-\infty,\frac{3}{2})$.

Bew.: Es gilt: $|x+2|<|x-5| \Leftrightarrow \max\{x+2,-x-2\}<|x-5|$

$\Leftrightarrow x+2<|x-5| \underset{\text{und}}{\wedge} -x-2<|x-5|$.

Behandeln beide Teile der letzten Aussage einzeln:

1.) $x+2<|x-5| \Leftrightarrow \underbrace{x+2<x-5}_{\text{falsch}} \underset{\text{oder}}{\vee} \underbrace{x+2<-x+5}$

$\Leftrightarrow 2x<3 \Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$.

2.) $-x-2<|x-5| \Leftrightarrow -x-2<x-5 \vee \underbrace{-x-2<-x+5}_{\text{wahr für alle } x} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Somit folgt: $|x+2|<|x-5| \Leftrightarrow x\in(-\infty,\frac{3}{2})$. □

(ii) Vor.: $B=\{x\in\mathbb{R};\ \frac{x}{x+2}>\frac{x+3}{3x+1}\}$,

Beh.: $B=(-\infty,-2)\cup(-1,-\frac{1}{3})\cup(3,\infty)$.

Bew.: Fallunterscheidung nach VZ der Nenner:

1.) $\underbrace{x+2>0 \wedge 3x+1>0}_{x>-2\ \wedge\ x>-\frac{1}{3}}$: $x(3x+1)>(x+3)(x+2) \Leftrightarrow 2x^2-4x-6>0$

$\rightsquigarrow x>-\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 2(x+1)(x-3)>0 \Leftrightarrow (x>-1 \wedge x>3)$

$\vee (x<-1 \wedge x<3) \Leftrightarrow x>3 \vee x<-1$

Also: 1.) $\Leftrightarrow \underline{\underline{x>3}}$.

2.) $x+2>0 \wedge 3x+1<0$: $x>-2 \wedge x<-\frac{1}{3} \wedge (x>-1 \wedge x<3$

$\underbrace{\vee\ x<-1 \wedge x>3}_{\text{unerfüllbar}}) \Leftrightarrow \underline{\underline{-1<x<-\frac{1}{3}}}$

3.) $x+2<0 \wedge 3x+1>0$: $x<-2 \wedge x>-\frac{1}{3}$ nicht erfüllbar

4.) $x+2<0 \wedge 3x+1<0$: $x<-2 \wedge x<-\frac{1}{3} \wedge (x>3 \vee x<-1)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x<-2}}$ □

(iii) Vor.: $C = \{x \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N}: x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} > x^n + \frac{1}{x^n}\}$,

Beh.: $C = (0,1) \cup (1,\infty)$.

Bew.: Sei $x \neq 0$. Dann gilt:

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} > x^n + \frac{1}{x^n}. \quad \oplus$$ wollen dies mal x^{n+1} nehmen.

1. Fall: $x > 0$. $\oplus \Leftrightarrow x^{2n+2} + 1 > x^{2n+1} + x$

$$\Leftrightarrow x^{2n+1}(x-1) > x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{2n+1} > 1 \Leftrightarrow \underline{x > 1}, & \text{für } x > 1 \\ x^{2n+1} < 1 \Leftrightarrow |x| < 1, & \text{für } \underline{0 < x < 1} \end{cases}$$

2. Fall: $x < 0$. Falls n gerade: $\oplus \Leftrightarrow x^{2n+1}(x-1) < x-1 \Leftrightarrow x^{2n+1} > 0$, $\not{}$.

Für $x < 0$ kann die Ungl. für gerades n nicht gelten.

Also: Genau für $x > 0$, $x \neq 1$, gilt die Unglg. für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

(iv) Vor.: $D = \{\frac{x}{1+x};\ x \in \mathbb{R}, x > -1\}$

Beh.: $D = (-\infty, 1)$.

Bew.: Haben: $$\frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = 1 - \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\substack{\to 0 \text{ für } x \to +\infty \\ \to \infty \text{ für } x \to -1}},$$

also ist $D = (-\infty, 1)$. $\square$

e) Haben: $\sup A = \frac{3}{2}$; $\inf A$, $\min A$, $\max A$ ex. nicht

$\sup B$, $\inf B$, $\min B$, $\max B$ ex. nicht

$\inf C = 0$; $\sup C$, $\min C$, $\max C$ ex. nicht

$\sup D = 1$; $\inf D$, $\max D$, $\min D$ ex. nicht

Aufgabe 1.2

Vor: $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$, Beh.: Lösungsmengen der Gleichungen (i) – (vi) sind

(i) $\mathbb{L} = \{\exp(\frac{\log c}{b\log a})\}$ für $a \neq 1$, $\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{R}_{>0}, c=1, a=1 \\ \emptyset \ c\neq 1 \ a=1 \end{cases}$ (ii) $\mathbb{L} = \{0, 1\}$,

(iii) $\mathbb{L} = \{\frac{\log b}{\log(\log a)}\}$ für $a \neq e$, $\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{R}_{>0}, a=e, b=1 \\ \emptyset, a=e, b\neq 1 \end{cases}$ (iv) $\mathbb{L} = \{\frac{b}{ac}\log 2\}$,

(v) $\mathbb{L} = \{c - b + \log a\}$, (vi) $\mathbb{L} = \{\exp(\frac{b}{2}\cdot\frac{\log 2}{\log a})\}$ für $a \neq 1$, $\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{R}_{>0}, a=1, b=0 \\ \emptyset, a=1, b\neq 0 \end{cases}$

Bew.: (i)

$$a^{\log(x^b)} = c \iff e^{\log(x^b)\log a} = e^{\log c} \iff \log(x^b) = \frac{\log c}{\log a}, \text{ falls } a \neq 1$$

$\iff \log x = \frac{\log c}{b \log a}$, falls $a \neq 1$, sonst: $a=1, c=1$: alle $x>0$ tun's
$a=1, c\neq 1$: kein $x>0$ tut's

(ii) $x^x = 1 \iff e^{x\log x} = e^0 \iff x\log x = 0 \iff x = 0 \vee x = 1$

(iii) $(\log a)^x = b \iff e^{x\log(\log a)} = e^{\log b} \iff x = \frac{\log b}{\log(\log a)}$, falls $a \neq e$, sonst $\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{R}, a=e, b=1 \\ \emptyset, a=e, b\neq 1 \end{cases}$

(iv) $\exp(cx)^a = 2^b \iff \exp(acx) = \exp(b\log 2) \iff acx = b\log 2 \iff x = \frac{b\log 2}{ac}$

(v) $\log(\frac{a}{e^{x-c}}) = b \iff ae^{c-x} = e^b \iff e^x = ae^{c-b} = e^{c-b+\log a} \iff x = c - b + \log a$

(vi) $x^{2\log a} = 2^b \iff e^{2\log a \log x} = e^{b\log 2} \iff \begin{cases} \log x = \frac{b}{2}\frac{\log 2}{\log a} \iff x = \exp(\frac{b}{2}\cdot\frac{\log 2}{\log a}), \quad a \neq 1 \\ x>0 \text{ für } a=1, b=0, \quad \text{kein } x \text{ für } a=1, b\neq 1 \end{cases}$ □

(b) $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1+i}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{1}{2}(1-2i+i^2) = \frac{1}{2}(-2i) = -i$

$\frac{(1+2i)^2}{2+3i} = \frac{(1+4i+4i^2)(2-3i)}{2^2+3^2} = \frac{1}{13}(-3+4i)(2-3i) = \frac{1}{13}(-6+12+9i+8i) = \frac{6}{13} + \frac{17}{13}i$

$\frac{1+2i}{(2+3i)^2} = \frac{1}{13^2}\cdot(1+2i)(2-3i)^2 = \frac{1}{13^2}(1+2i)(4-12i-9) = -\frac{1}{13^2}(1+2i)(5+12i)$

$= -\frac{1}{13^2}(5-24+10i+12i) = \frac{19}{13^2} - \frac{22}{13^2}i$

$\frac{(4-i)^2}{(2+i)^2} = \frac{(4-i)^2(2-i)^2}{(4+1)^2} = \frac{1}{25}(8-1-4i-2i) = \frac{1}{25}(7-6i)^2$

$= \frac{1}{25}(49-36-12\cdot 7i) = \frac{13}{25} - \frac{84}{25}i$ □

Aufgabe 1.3

Vor.: $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a) Beh.: $|x+y+z| \leq |x|+|y|+|z|$

Bew.: $|x+y+z| = |(x+y)+z| \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |x+y|+|z| \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |x|+|y|+|z|.$ $\square$

(b) Beh.: $|x-y| \geq |x|-|y|$

Bew.: $\text{r.S.} = |x|-|y| = |(x+y)-y| - |y| \leq |x+y|+|y|-|y| = |x+y| = \text{l.S.}$ $\square$

(c) Beh.: $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$

Bew.: $2\cdot\text{l.S.} = 2x^2+2y^2+2z^2 = (x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(x^2+z^2)$

$\geq 2xy + 2yz + 2xz = 2\cdot \text{r.S.}$ $\square$

[da $x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$.]

(d) Beh.: $3\cdot\sqrt[3]{xyz} \leq x+y+z$, falls $x,y,z>0$

Bew.: $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$ ist die Ungl. von geom. & arithm. Mittel (für "$n=3$").

Wdh.: Sei $r := \frac{x+y}{2}$, haben $r^2 \geq xy$ wegen $(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 0$ ✓

Damit ist

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \left(\frac{2r+z}{3}\right)^3 = \left(\frac{3r+(z-r)}{3}\right)^3 = r^3\left(1+\frac{z-r}{3r}\right)^3$$

$$\geq r^3\cdot\left(1+3\cdot\frac{z-r}{3}\right) = r^2 z \geq xyz. \quad \square$$

Bernoulli-Ungl. anwendbar da $\frac{z-r}{3r} = \frac{z}{3r} - \frac{1}{3} > -\frac{1}{3} > -1$

$r^2 \geq xy$

Aufgabe 1.4

(a) Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $x^{2n-1}+y^{2n-1}$ ist durch $x+y$ teilbar (x,y Unbestimmte)

Bew.: Vollst. Ind. nach n: $\underline{n=1}$: $x^{2-1}+y^{2-1} = x+y$ ist Vielfaches von $x+y$ ✓

$\underline{n \rightsquigarrow n+1}$: Ind. Vor.: Sei $x^{2n-1}+y^{2n-1} = (x+y)\cdot P(x,y)$ für ein Polynom $P(x,y)$.

Dann ist: $x^{2(n+1)-1}+y^{2(n+1)-1} = x^{2n+1}+y^{2n+1} = (x^{2n-1})\cdot x^2 + (y^{2n-1})\cdot y^2$

$$= x^{2n-1}\cdot x^2 + x^{2n-1}\cdot xy - \underbrace{x^{2n-1}}_{=(x+y)P(x,y)-y^{2n-1} \text{ nach Ind.Vor.}}\cdot xy + y^{2n-1}\cdot y^2$$

$= x^{2n}(x+y) - (x+y)P(x,y) + y^{2n}(y+x)$, ist Vielfaches von $x+y$. ✓ $\square$

(d) Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}: 2\sin(\frac{x}{2}) \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \cos(\frac{x}{2}) - \cos((n+\frac{1}{2})x)$

Bem.: Benutze $2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$. $\otimes$

Bew.: Vollst. Ind. nach n: $\underset{\sim\sim}{n=1}$: $l.S. = 2\sin(\frac{x}{2})\sin(x) \overset{\otimes}{=} \cos(\frac{x}{2}) - \cos(x + \frac{x}{2}) = r.S.$ ✓

$\underset{\sim\sim\sim}{n \rightsquigarrow n+1}$: $l.S. = 2\sin(\frac{x}{2}) \sum_{k=1}^{n+1} \sin(kx) = 2\sin(\frac{x}{2}) \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) + 2\sin(\frac{x}{2}) \sin((n+1)x)$

$$\underset{\text{Ind.vor., }\otimes}{=} \cos(\frac{x}{2}) \underbrace{- \cos((n+\frac{1}{2})x) + \cos((n+1)x - \frac{x}{2})}_{=0} - \cos((n+1)x + \frac{x}{2}) = r.S. ✓ \quad \square$$

Aufgabe 2.1

Grenzwertbestimmungen:

a) $a_n = \frac{3n^2 - 5n}{5n^2 + 6n - 2} = \frac{3 + \frac{5}{n}}{5 + \frac{6}{n} - \frac{2}{n^2}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{3+0}{5+0+0} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$

b) $b_n = \frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2 - 1} = \frac{n(n+2)(n-1) - n^3}{n^2 - 1} = \frac{n^3 + n^2 - 2n - n^3}{n^2 - 1} = \frac{1 - \frac{2}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \to \underline{\underline{1}}$

c) $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \to \infty} \underline{\underline{0}}$

d) $d_n = \left(\frac{2n-1}{3n+4}\right)^4 = \left(\frac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{4}{n}}\right)^4 \xrightarrow{n \to \infty} \left(\frac{2-0}{3+0}\right)^4 = \underline{\underline{\left(\frac{2}{3}\right)^4}}$

e) $e_n = (1 + n + n^2)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \log(1 + n + n^2)\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \log\left(n^2(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})\right)\right)$

$= \exp\Big(\underbrace{\frac{2 \log n}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\log(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}_{\to 0}\Big) \longrightarrow \exp(0) = \underline{\underline{1}}$

f) $f_n = \frac{h_1 + \ldots + h_n}{n}$, wo $h_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 1, & n \text{ gerade} \end{cases}$

$\rightsquigarrow f_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \frac{1}{n} = (\frac{n}{2} + R_n) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{R_n}{n}}_{\to 0, \text{ da } 0 \le R_n < 1} \longrightarrow \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

g) $g_{n+1} = \frac{1}{2}(g_n + \frac{p}{g_n})$ mit $p, g_1 > 0$. Beh.: $g_n \to \underline{\underline{\sqrt{p}}}$

- Falls $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kgt., ist der GW $g = \sqrt{p}$, denn: aus $g = \frac{1}{2}(g + \frac{p}{g})$ folgt $g = \frac{p}{g}$, also $g = \pm\sqrt{p}$. Ein negativer GW geht nicht, da die $g_n > 0$ für alle n, also folgt $g = \sqrt{p}$. Zu zeigen ist noch die Konvergenz.
- Dazu gen. z.z.: $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschr. und monoton wachsend für große n.

Mon. steigend: $g_{n+1} = \frac{1}{2} g_n + \frac{p}{g_n} \ge g_n \iff \frac{p}{g_n} \ge \frac{g_n}{2} \iff g_n \le \sqrt{2p}$.

Daher gen. z.z.: $\exists n_0\ \forall n \ge n_0: g_n \le \sqrt{2p}$. Bew.: 1. Fall: $g_1 \le \sqrt{2p}$, dann alles klar.

2. Fall: $g_1 > \sqrt{2p}$. Dann: $g_2 = \frac{1}{2}(g_1 + \frac{p}{g_1}) < \underline{\frac{1}{2} g_1} + \frac{\sqrt{p}}{2}$ usw., bis ein $g_k \le \sqrt{2p}$ wird. (klappt, warum?)

Aufgabe 2.2

(a) Beh.: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Bew.: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. mit GW $a\in\mathbb{R}$, d.h. $\forall \varepsilon>0\ \exists N_0\ \forall n\ge N_0: |a_n-a|<\varepsilon$.

z.z.: $\exists C>0\ \forall n\in\mathbb{N}: |a_n|\le C$.

1. Fall: $a\neq 0$. Zu $\varepsilon=|a|>0$ betr. $N_0=N_0(|a|)$, $\forall n\ge N_0(|a|)$: $\underbrace{|a_n-a|}_{\ge |a_n|-|a|}<|a| \Rightarrow |a_n|\le 2|a|$.

Somit: Setze: $C:=\max\{|a_1|,\dots,|a_{N_0}|, 2|a|\}$.

Dann gilt für $n\le N_0$: $|a_n|\le \max\{|a_1|,\dots,|a_{N_0}|\}\le C$,

" " für $n>N_0$: $|a_n|\le 2|a|\le C$. Dies zeigt die Beh. im 1. Fall.

2. Fall: $a=0$. Nimm ebenso $C:=\max\{|a_1|,\dots,|a_{N_0(1)}|,1\}$. □

(b) Beh.: $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. mit GW $A\neq 0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ mit $|a_n|>\frac{|A|}{2}$ für alle $n\ge N$.

Bew.: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. mit GW A, d.h. $\forall \varepsilon>0\ \exists N_0\ \forall n\ge N_0: |a_n-A|<\varepsilon$.

Zu $\varepsilon=\frac{|A|}{2}>0$ betr. $N_0=N_0(\frac{|A|}{2})$, d.h. $\forall n\ge N_0: |a_n-A|<\frac{|A|}{2}$.

Es folgt für alle $n\ge N_0$:

$$|A|-|a_n|\le|a_n-A|<\frac{|A|}{2}\Rightarrow |a_n|>|A|-\frac{|A|}{2}=\frac{|A|}{2}.$$

Also folgt die Beh. mit $N:=N_0(\frac{|A|}{2})$. □

(c) Beh.: Jede konvergente Folge besitzt entweder Max oder Min oder beides.

Bew.: Fallen Supremum und Infimum zusammen, liegt letzter Fall vor. Sind diese verschieden, ist **mindestens** eine von beiden Zahlen vom GW verschieden, **diese** Zahl ist dann der kleinste oder größte Wert der Folge. (Diese Zahl wird als Wert angenommen, sonst wäre leicht eine Teilfolge mit diesem Wert als GW konstruierbar, was der Kgz. gegen einen anderen Wert widerspricht.) □

Aufgabe 2.3

Vor.: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=a<1$, $a\in\mathbb{R}$.

Beh.: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge.

Bew.: Es ist $a\ge 0$. Ist $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to a$, so ist $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\le\eta\ \forall n\ge N_0(\eta)$, wo $a<\eta<1$.

Also: $|u_{n+1}|\le\eta|u_n|$ für alle $n\ge N_0=N_0(\eta)$.

Das zeigt: $|u_n|\le\eta^{n-N_0}|u_{N_0}|$ für alle $n\ge N_0$ mit vollst. Ind.: $n=N_0$: $|u_{N_0}|=1\cdot|u_{N_0}|$ ✓,

$n\rightsquigarrow n+1$: $|u_{n+1}|\le\eta|u_n|\underset{\text{(Ind. Vor.)}}{\le}\eta\cdot\eta^{n-N_0}\cdot|u_{N_0}|=\eta^{(n+1)-N_0}|u_{N_0}|$. ✓

Somit: $|u_n|\le\eta^{n-N_0}\cdot|u_{N_0}|\xrightarrow{n\to\infty}0$. □

<u>Alternative Lösung:</u> Ist $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = a < 1$, so konvergiert nach dem Quotientenkriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Daher ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. $\square$

<u>Aufgabe 2.4</u>

Vor.: A_n das arithm., G_n das geom. Mittel von $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$.

Beh.: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} = 2$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{G_n} = \sqrt{e}$.

Bew.: • Erst zu $A_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1^k \cdot 1^{n-k}\cdot\binom{n}{k} \underset{\text{binom. Satz}}{=} \frac{1}{n+1}\cdot(1+1)^n$,

also $A_n = \frac{2^n}{n+1}$, und $\sqrt[n]{A_n} = \frac{2}{\sqrt[n]{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{\underline{2}}$.

• Zu $G_n := \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}$, und $\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \prod_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n!)^{n+1}}{(1!2!\cdots n!)^2}$

$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \prod_{k=1}^{n}(n+1-k)^{n+1-2k} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{n+1}\right)^{n+1-2k}$,

da $\sum_{k=1}^{n}(n+1-2k) = 0$. Also ist:

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log G_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2k}{n+1}\right)\log\left(1-\frac{k}{n+1}\right)$

$= \int_0^1 (1-2x)\log(1-x)\,dx = \frac{1}{2}$, also $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log G_n} = e^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{e}}}$.

hier gibt es noch was zu rechnen...

$\square$