# Lösungen zu den Repetitoriumsaufgaben Analysis 1

(Teile 9+10)

## Aufgabe 9.1

Konvergenzradiusbestimmung: $R^{-1} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, falls ex., sonst: $R := \begin{cases} 0, & (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ div.} \\ \infty, & \limsup = 0 \end{cases}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$: $\sqrt[n]{n} \to 1$, also $R = 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n$: $\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n} \to 0$, also $R = \infty$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$: $\sqrt[n]{n^n} = n$ div., also $R = 0$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$: $\sqrt[n]{\frac{n^3}{n!}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow 0 \cdot 1 = 0$, also $R = \infty$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$: Lieber Quot. Krit.: $\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot |x| = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \cdot |x| \to \frac{|x|}{4}$,
also kgz. für $x \in (-4,4)$, d.h. $R = 4$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{\sqrt{n}}} x^n$: $\sqrt[n]{\frac{1}{10^{\sqrt{n}}}} = 10^{-\frac{\sqrt{n}}{n}} = 10^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \log(10)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(0) = 1$,
also $R = 1$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+(-1)^n)^n}{n} x^n$: $\sqrt[n]{\frac{(5+(-1)^n)^n}{n}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(5+(-1)^n)}_{\limsup \text{''} \le 6}$, also $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 6$
und $R = \frac{1}{6}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$: hier ist <u>nicht</u> $a_n = \frac{1}{2n+1}$, gehen so vor:

Reihe ist $= \sum_{k=3}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{k}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$

Dann: $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \underbrace{\sqrt[k]{\frac{1}{k}}}_{\to 1} = 1$, d.h. $R = 1$. $\square$

## Aufgabe 9.2

Vor.: $\rho > 0$ sei der Kgz.radius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, d.h. $\rho^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

(a) Beh.: Kgz.radius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ ist $\sqrt{\rho}$.

Bew.: Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^2)^n \text{ kgt. für } |x^2| < \rho \text{ und div. für } |x^2| > \rho,$$

also ist der Kgz.radius $\sqrt{\rho}$. □

(b) Beh.: Kgz.radius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 x^n$ ist $\rho^2$.

Bew.: Haben

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n^2|} = \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right)^2 = \rho^{-2},$$

also ist $\rho^2$ der Kgz.radius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 x^n$. □

(c) Beh.: Kgz.radius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 x^{2n}$ ist $\rho$.

Bew.: wegen a) und b) ist dieser gleich $\sqrt{\rho^2} = \rho$. □

(d) Beh.: Kgz.radius von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ ist $\infty$.

Bew.:

Haben $\sqrt[n]{|a_n|} \not\to \infty$, da $\rho \neq 0$. Weiter ist $\sqrt[n]{n!} \to \infty$,

also ist $\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} \to 0$, d.h. $\infty$ ist der Kgz.radius der Reihe. □

## Aufgabe 9.3

Beh.: Es gilt $\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx = 0.862 + R$ mit $|R| \leq 0.001$.

Bew.:

Haben $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot y^n$, also $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (-x^2)^n$,

also $$1 - e^{-x^2} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x^2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n}}{n!},$$

somit $$\frac{1-e^{-x^2}}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2(n-1)}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{(-1)^2}_{=1} \cdot \frac{x^{2n}}{(n+1)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^6}{4!} + \frac{x^8}{5!} - + \ldots$$

Wegen glm Kgz. (der exp-Reihe, also dieser Reihe)

gilt $\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx = x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3\cdot 2!}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{5\cdot 3!}\Big|_0^1 - \frac{x^6}{6\cdot 4!}\Big|_0^1 + \frac{x^7}{7\cdot 5!}\Big|_0^1 - + \ldots = 1 - \frac{1}{3\cdot 2!} + \frac{1}{5\cdot 3!} - \frac{1}{6\cdot 4!} + \frac{1}{7\cdot 5!} \ldots$

$$= 1 - 0.16666 + 0.03333 - 0.00595 + \underbrace{0.00092 - \ldots}_{=:R} = 0.862 + R,$$

wobei der Rest $\leq$ dem 5. Term in der Entwicklung ist,

also $\leq 0.00092 \leq 0.001$. (vgl. Restgliedabsch. von exp-Reihe). $\square$

## Aufgabe 9.4

a) Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

Bew.: (nicht mit vollst. Ind. – ginge auch, aber viel umständlicher!)

Analytischer Beweis: Vgl. die mittleren Koeffizienten in der Identität

$$(1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n}$$

Haben: l.S. $= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l\right) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{l} x^{k+l}$,

mit $0 \leq l+k \leq 2n$, der Koeff. vor $x^n$ ist $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$,

dieser ist identisch mit dem Koeff. vor $x^n$ der r.S. der Identität,

gleich $\binom{2n}{n}$, denn wg. Identitätssatz für Potenzreihen müssen diese Koeff. gleich sein.

$\square$

b) Beh.: $\binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - + \ldots - \binom{2n}{2n-1}^2 + \binom{2n}{2n}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$

Analytischer

Bew.: Identität $(1+x)^{2n} \cdot (1-x)^{2n} = (1-x^2)^{2n}$:

Haben

$$l.S. = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} x^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{n} \binom{2n}{l} (-1)^l x^l\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \binom{2n}{k}\binom{2n}{l} (-1)^l x^{k+l}$$

der Koeff. vor $x^{2n}$ ist $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}\binom{2n}{2n-k} \cdot (-1)^k$, die l.S. der Beh.

Wg. Identitätssatz für Potenzreihen

ist dieser mit dem Koeff. vor $x^{2n}$ in $(1-x^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}(-x^2)^k$,

nämlich $\binom{2n}{n} \cdot (-1)^n$. $\square$

## Aufgabe 10.1

Taylor-Entwicklung im Punkt $x_0$ und Konvergenzradius der Taylorreihe:

Allg.: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$

a) Sei $f(x) := \frac{1}{x}$, $x_0 := 1$.

- Ableitungen von $f$ in $x_0 = 1$ sind: $f'(x) = -x^{-2} \rightsquigarrow f'(1) = -1$,
  $f''(x) = 2x^{-3} \rightsquigarrow f''(1) = 2$, $f'''(x) = -6x^{-4} \rightsquigarrow f'''(1) = -6, \ldots$

  Allgemein: $f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k!\, x^{-k-1}$, also $\underline{\underline{f^{(k)}(1) = (-1)^k k!}}$.

  Beweis mit vollst. Induktion: $k=0$: $f(1) = 1 = (-1)^0 \cdot 0!$ ✓

  $k \rightsquigarrow k+1$: Haben $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) \underset{\text{Ind.vor.}}{=} ((-1)^k k!\, x^{-k-1})' = (-1)^{k} \cdot (k+1)!$ ✓ $\square$

- Taylor-Reihe ist $\underbrace{1}_{f(1)} - \underbrace{1}_{f'(1)} \cdot (x-1) + \underbrace{1}_{f''(1)/2!} \cdot (x-1)^2 \underbrace{-1}_{=f'''(1)/3!} \cdot (x-1)^3 + - \ldots = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (x-1)^k}}$

- Konvergenzradius: in Reihe $\sum (-1)^k \cdot y^k$ ist 1 (da geom. Reihe),
  mit $x-1 = y$ folgt, daß das Kgz.intervall von $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$
  gleich $\underline{\underline{(0,2)}}$ ist.

b) Sei $f(x) := \sqrt{x}$, $x_0 = 2$.

• Ableitungen $f^{(k)}(x)$ bestimmen: $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$, ...,

allg.: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\cdot\frac{(2k-3)\cdots 1}{2^k}\, x^{-(2k-1)/2}$.

Bew. mit vollst. Ind.: $k=0$: ✓

$k \to k+1$: $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = (-1)^{k-1}\cdot\frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 3\cdot 1}{2^k}\cdot\frac{(2k-1)}{2}\cdot(-1)$ ✓

Also: $f^{(k)}(2) = (-1)^{k-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)}{2^k}\cdot\frac{1}{2^k}\cdot\sqrt{2}$

• Taylor-Reihe ist: $\sqrt{2}\cdot\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\underbrace{\frac{1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2\cdot 4\cdots(2k)}}_{\text{Nenner hier ist } 2^k\cdot k!}\cdot\frac{(x-2)^k}{2^k}\right)$

• Kgz. IV bestimmen:

Mit Quot. Krit.: $\frac{1\cdot 3\cdots(2k+2-3)}{2\cdot 4\cdots(2k+2)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdots(2k)}{1\cdot 3\cdots(2k-3)}\cdot\frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{2k-1}{2k+2}\cdot\frac{1}{2}\longrightarrow\frac{1}{2}$,

$\leadsto$ Kgz radius von $\sum a_n y^n$ ist $R=2$, mit $y=x-2$ folgt: Kgz.-IV der Taylor-$\sum$ ist $(0,4)$.

c) Sei $f(x) := e^x$, $x_0 = -3$ • Ableitungen: $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(-3) = e^{-3}$

• Zugehörige Taylor-$\sum$: $e^{-3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+3)^k}{k!}$ • Kgz. IV: $(-\infty,\infty)$, da $\sqrt[k]{\left|\frac{1}{k!}\right|}\to 0$

d) Sei $f(x) := \log x$, $x_0 = 1$.

• Ableitungen: $f'(x) = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$, $f'''(x) = 2x^{-3}$, allg.: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,x^{-k}$,

also $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$

• Taylor-Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}$ (da $\log 1 = 0$)

• Kgz. radius von $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{y^k}{k}$ ist $1$, da $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\to 1$,

Kgz. IV der Taylor-$\sum$ ist dann $(0,2)$, da $y = x-1\in(-1,1)$ dann $x\in(0,2)$ zur Folge hat. □

## Aufgabe 10.2

Beh.: Die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ in $x=0$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2k)} \cdot \frac{x^{4k+1}}{4k+1}$, also gleich:

$$x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^9}{9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^{13}}{13} + \ldots,$$

für $x \in [-1,1]$.

Bew.: Entwickeln erst $g(t) = (1-t^4)^{-\frac{1}{2}}$ in eine Potenzreihe in $t=0$:

Dazu ist die Berechnung aller Ableitung in $0$ nötig und leicht umständlich.

Verwenden stattdessen die Binomialreihe: $(1-y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \underline{(-1)^k} y^k$ (für $y \in [-1,1]$),

und mit $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\binom{-1/2}{k} = \frac{(1/2)\cdot(1/2-1)\cdot(1/2-2)\cdots(\frac{1}{2}-(k-1))}{k!} = \frac{1}{k!}\cdot(-1)^k\cdot\frac{1}{2^k}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)$

$$= \underline{\underline{(-1)^k}} \cdot \underbrace{\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2k)}}_{=:b_k}$$

folgt:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{4k} \quad \text{innerhalb } [-1,1].$$

Für $x<1$ folgt die Gleichmäßige Konvergenz auf $(0,x)$,

also darf das $\int_0^x$ mit dem Reihenzeichen vertauscht werden:

Es folgt:

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot t^{4k}\, dt$$

$$\overset{\text{glm. Kgz.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_0^x t^{4k}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \frac{t^{4k+1}}{4k+1}\Big|_0^x$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \frac{x^{4k+1}}{4k+1}.$$

$\square$

## Aufgabe 10.3: Grenzwertbestimmungen mit Reihenentwicklungen

a) Beh.: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \log(1+x)}{1-\sqrt{1+x^2}} = -2$

Bew.: Haben $\sin x = x + R_1(x)$, $\log(1+x) = x + R_2(x)$,

$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + R_3(x)$ mit $\frac{R_1(x)}{x^2}, \frac{R_2(x)}{x^2}, \frac{R_3(x)}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$.

also ist der GW $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+R_1(x))(x+R_2(x))}{1-1-\frac{x^2}{2}+R_3(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + R_4(x)}{-\frac{x^2}{2}+R_3(x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\frac{R_4(x)}{x^2}}{-\frac{1}{2}+\frac{R_3(x)}{x^2}} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{-2}}$, denn $R_4(x) := x(R_1(x)+R_2(x)) + R_1(x)\cdot R_2(x)$

erfüllt $\frac{R_4(x)}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$. $\square$

b) Beh.: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right) = -\frac{1}{2}$

Bew.: Benutze $\log x = x-1-\frac{(x-1)^2}{2} + R(x)$, wo $\frac{R(x)}{(x-1)^2} \xrightarrow{x\to 1} 0$, (vgl. 10.1d))

dann ist $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+R(x)}$

$$= \frac{x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+R(x)-x+1}{(x-1)\left((x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+R(x)\right)} = \frac{-\frac{1}{2}(x-1)^2+R(x)}{(x-1)^2+S(x)}$$

wobei $\frac{S(x)}{(x-1)^2} \xrightarrow{x\to 1} 0$, da $S(x) = -\frac{(x-1)^3}{2} + R(x)(x-1)$,

also ist obiges $= -\frac{1}{2}\cdot \dfrac{1+\frac{R(x)}{(x-1)^2}}{1+\frac{S(x)}{(x-1)^2}} \xrightarrow{x\to 1} \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$. $\square$

<u>Aufgabe 10.4</u>

Beh.: Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x = ye^y$ gilt $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{n-1}}{n!} x^n$ für $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$.

Bew.: folgt noch