K. Halupczok

## Abschnitt 6 – Differenzierbarkeit:

### Aufgabe 6.1

Sei $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in ]a,b[$, so ist $f$ konstant.

(b) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in ]a,b[$, so ist $f$ streng monoton wachsend.

### Aufgabe 6.2

Zeigen Sie:

(a) Für $0 < a < b$ gilt $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$.

(b) Es gilt $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan \frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$.

### Aufgabe 6.3*

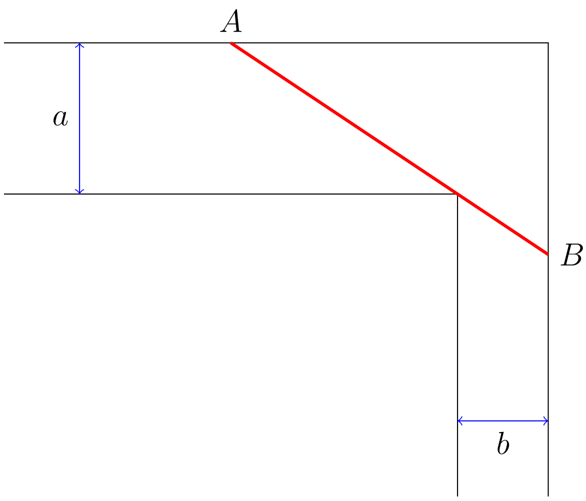
Seien $a < b$ reell. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\frac{\sin b - \sin a}{\cos a - \cos b} = \frac{\cos \xi}{\sin \xi}$ für ein $\xi \in ]a,b[$.

(b) Für $a = 0$ und $b = x$ in (a) ist $\xi = x/2$. Gilt das Ergebnis auch für $x < 0$?

### Aufgabe 6.4*

Bestimmen Sie die Länge der längsten Leiter, die durch einen Eckgang der angegebenen Maße transportiert werden kann, vorausgesetzt, die Leiter kann nur parallel zum Boden getragen werden.



### Aufgabe 7.1

Berechnen Sie die folgenden Riemann-Integrale.

(a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\log x}{x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^1 3^{\sqrt{2x+1}}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^1 x\log(x+3)\,dx$, (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$.

### Aufgabe 7.2

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n \log x$ für (a) $n \neq -1$ und (b) für $n = -1$.

### Aufgabe 7.3*

Zeigen Sie: Sind die Funktionen $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beide $n$-mal stetig differenzierbare Funktionen auf $[a, b]$, so gilt

$$\int_a^b u(x)v^{(n)}(x)dx = uv^{(n-1)}\Big|_a^b - u'v^{(n-2)}\Big|_a^b + u''v^{(n-3)}\Big|_a^b - \cdots + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}(x)v(x)dx.$$

Berechnen Sie so $\displaystyle\int_0^{\pi} x^4 \sin x\,dx$.

### Aufgabe 7.4*

Zeigen Sie die folgenden Abschätzungen:

$$\text{(a) } 0 \leq \int_0^1 x^{39}\sin^8 x\,dx \leq \frac{1}{40}, \qquad \text{(b) } \frac{8}{15\sqrt{5}} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \frac{8}{15}.$$

## Abschnitt 8 – Funktionenfolgen :

### Aufgabe 8.1

Auf welchen Teilmengen von $\mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen gleichmäßig?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x^2)^n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2-n+1}$

**Aufgabe 8.2**

(a) Die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ konvergiert zwar gleichmäßig auf $\mathbb{R}_{>0}$, nicht aber die Funktionenfolgen $(\frac{1}{n} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Auf welchen Intervallen $[a, b]$ mit $a < b$ konvergiert die Funktionenreihe $x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$ gleichmäßig?

**Aufgabe 8.3**

Sei $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. Zeigen Sie, dass $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ gilt.

**Aufgabe 8.4***

Zeigen Sie, dass $\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

**Abschnitt 9 – Potenzreihen :**

**Aufgabe 9.1**

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10\sqrt{n}} x^n$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+(-1)^n)^n}{n} x^n$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

**Aufgabe 9.2**

Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Reihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 x^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 x^{2n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$

**Aufgabe 9.3***

Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$$

auf drei Nachkommastellen genau.

**Aufgabe 9.4***

Beweisen Sie die folgenden Identitäten (für alle $n \in \mathbb{N}$).

(a) $$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

(b) $$\binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - \cdots - \binom{2n}{2n-1}^2 + \binom{2n}{2n}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

## Abschnitt 10 – Taylorreihen:

**Aufgabe 10.1**

Entwickeln Sie folgende Funktionen nach Potenzen von $(x - x_0)$ und geben Sie das Konvergenzintervall der resultierenden Reihen an.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$ (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 2$

(c) $f(x) = e^x$, $x_0 = -3$ (d) $f(x) = \log x$, $x_0 = 1$

**Aufgabe 10.2**

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$ in eine Potenzreihe mit dem Mittelpunkt $x = 0$.

**Aufgabe 10.3**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte durch Heranziehen der ersten Glieder bekannter Potenzreihenentwicklungen.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \log(1 + x)}{1 - \sqrt{1 + x^2}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \left( \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\log x} \right)$

**Aufgabe 10.4*****

Zeigen Sie für beliebige reelle Zahlen $x$ und $y$:

Gilt $x = ye^y$, so ist $y = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{n-1}}{n!} x^n$ für $-\frac{1}{e} < x \leq \frac{1}{e}$.