Repetitorium zur Analysis 1

Mathematisches Institut, WWU Münster

Karin Halupczok

Beginn SoSe 2012

Teil 0: Was ist mathematische Heuristik?

Was ist Heuristik?

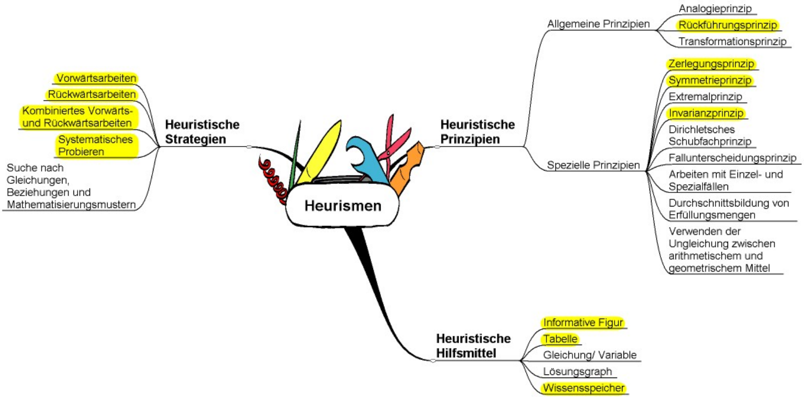
Ziel der Heuristik ist es, Methoden und Regeln zur Entdeckung und Erfindung zu studieren und diese anzuwenden.
„heuristisch“ bedeutet „zur Entdeckung dienend“

Was ist mathematische Heuristik?

Darunter versteht man zum einen Plausibilitätsüberlegungen, ob eine aufgestellte mathematische Behauptung wahr oder falsch ist, (wie z. B. das Abschätzen der gesuchten Größe, nicht deren genaue Bestimmung) zum anderen aber auch Pläne, wie der Beweis einer mathematischen Behauptung durchgeführt werden könnte.

Eine Heuristik beinhaltet vorläufiges, plausibles Denken zum Zweck der Lösung einer Aufgabe. Die heuristische Überlegung ist aber selbst kein Beweis und darf auch nicht mit einem Beweis verwechselt werden, da manchmal heuristische Überlegungen auch irreführen können. Aber sie helfen bei der Suche nach einem korrekten Beweis einer mathematischen Behauptung.

Zur Lösung mathematischer Aufgaben gibt es einige grundsätzliche Strategien (etwa die „Tabelle“ nach G. Polya) und eine Fülle spezieller Strategien zur Verfügung, die sogenannten *Mikrostrategien*, die auch fachlich sehr verschiedener Art sein können (in Analysis benutzt man eher andere als in Zahlentheorie. . .) Man stellt sie sich wie einen Werkzeugkasten vor:



Aus: Regina Bruder: Problemlösen für alle, Vortrag, Soltau, 2005

(`http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienIPN/Bruder.pdf`)

Die „Tabelle“ von Polya

Die Anleitungstabelle nach G. Polya, „Schule des Denkens“

Polya beschreibt darin grundsätzliche Lösungsstrategien, die bei der Lösung von Aufgaben helfen können, nämlich vier allgemeine Schritte zur Lösung mathematischer Aufgaben:

1. Schritt: Verstehen der Aufgabe/Analyse

(a) Analyse der Daten der Aufgabe: Was ist unbekannt/gesucht? Was ist gegeben? Wie lautet die Voraussetzung? Was ist die Behauptung?

(b) Lösbarkeit der Aufgabe: Ist die Voraussetzung erfüllbar? Reicht die Voraussetzung zur Lösung der Aufgabe/Bestimmung der Unbekannten? Ist die Voraussetzung unzureichend/ überbestimmt/kontradiktorisch? Ist die Aufgabe sinnvoll/richtig gestellt?

(c) Anschauung: Mache eine Skizze, führe passende Bezeichnungen ein.

(d) Teile der Aufgabe analysieren: Trenne verschiedene Teile der Voraussetzung und Behauptung, kannst Du sie hinschreiben oder anders formulieren?

2. Schritt: Ausdenken eines Plans/Erarbeiten einer Lösungsstrategie

Suche den Zusammenhang zwischen den Daten und der Unbekannten/der zu zeigenden Behauptung. Untersuche Hilfsaussagen/bekannte Resultate aus früheren Übungen/der Vorlesung, wenn nicht ein unmittelbarer Zusammenhang gefunden werden kann. Ziel ist es, einen Plan zur Lösung der Aufgabe zu erhalten. Prüfe Deine Vermutung(en)!

Zum 2. Schritt

(a) Hast Du die Aufgabe so oder ähnlich schon einmal gesehen? Suche nach Mustern/Regelmäßigkeiten in der Aufgabe.

(b) Kennst Du eine verwandte Aufgabe oder einen Satz (etwa aus der Vorlesung), der helfen könnte?

(c) Betrachte die Unbekannte/die zu zeigende Behauptung. Kennst Du Aufgaben mit ähnlicher Unbekannten/Behauptung? Kannst Du diese bzw. ihr Ergebnis verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden? Kannst Du ein Hilfselement einführen, so dass das frühere Resultat verwendbar wird?

(d) Kannst Du die Aussage der Behauptung anders ausdrücken? Gehe auf die Definition(en) zurück.

Zum 2. Schritt

(e) Versuche, eine verwandte Aufgabe zu lösen, kannst du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken, etwa durch Änderung der Voraussetzung oder der Behauptung? Allgemeiner oder spezieller? Oder analog? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? Kannst Du die Aufgabe nach Veränderung der Voraussetzung oder Behauptung lösen?

(f) Werden alle Daten/die ganze Voraussetzung/alle vorkommenden Begriffe benutzt?

3. Schritt: Ausführen des Plans (Synthese)

Kontrolliere bei der Ausführung jeden Schritt auf Richtigkeit.
Kannst Du beweisen, dass jeder Schritt richtig ist?

4. Schritt: Rückschau/Prüfung/Vertiefung

(a) Kannst Du das Resultat/den Beweis überprüfen? Etwa durch Einsetzen spezieller Zahlen usw. checken, ob es stimmt?

(b) Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Es können viele Wege zum Ziel führen!

(c) Kannst Du das Resultat/die Methode für irgend eine andere/spätere Aufgabe gebrauchen? Welches neue Wissen ergibt sich? Sollte man sich das Resultat/die Methode für später merken? Kann man so neue mathematische Aufgaben erfinden? Stimmt die Umkehrung? Oder eine Verallgemeinerung?

Ein spezieller Tipp für Lösungszettel

Mathematische Aufgaben sind meistens entweder Bestimmungsaufgaben (Bsp.: „Was sind die Nullstellen des Polynoms $x^2 - 1$?“, hier ist eine unbekannte Größe gesucht) oder Beweisaufgaben (Bsp.: „Zeigen Sie: Die Nullstellen des Polynoms $x^2 - 1$ sind 1 und -1.“, hier wird eine unbekannte Behauptung aufgestellt und bewiesen).

Wie in diesem Beispiel sieht man, dass Bestimmungsaufgaben – nachdem die Unbekannte bestimmt wurde – als eine Beweisaufgabe formuliert und diese dann bewiesen werden kann.

Auf Lösungszetteln ist es vorteilhaft, die Lösung der Aufgabe in Form einer Beweisaufgabe mit anschließendem Beweis aufzuschreiben, also in der Form „Vor.:. . . , Beh.:. . . , Bew.:. . . “

Notationen

Eine wichtige Strategie ist oft, passende Notationen einführen, speziell für die unbekannten Größen oder erkennbar wiederkehrenden Terme oder Muster, also dann, wenn mehrere, ähnliche (Formel-)Ausdrücke in der Behauptung vorkommen. Der Versuch, diese Ausdrücke zusammenzufassen, führt oft zur Entdeckung von Hilfselementen und kann dann schon zu einer Lösungsidee führen.

Lösbarkeit

Bevor man eine Aufgabe löst, spielt auch die Frage nach der Lösbarkeit eine Rolle: Ist die Aufgabe überhaupt richtig und sinnvoll gestellt? Wurde ein Spezialfall übersehen? (Zu Studienbeginn spielt dies meist noch nicht eine so große Rolle wie später, wenn der Ausgang, ob eine Aufgabe lösbar ist oder nicht, von vorneherein nicht klar ist. Manchmal muss eine Vermutung auch wieder verworfen oder modifiziert werden.)

Bemerkung zum 2. Schritt

Für den 2. Schritt, wenn ein Plan zur Lösung ausgearbeitet werden soll, ist die Analyse der Voraussetzung und Behauptung sehr hilfreich, da damit die Suche nach Verbindungen zu früheren Aufgaben/Resultaten einfacher wird. Dann kann eine Lösungsstrategie erarbeitet werden, die versucht wird. Wenn diese nicht zum Erfolg führt, versucht man einen anderen Weg.

Dies setzt voraus, dass man sich an frühere Aufgaben/Resultate erinnern kann. Deswegen ist auch der 4. Schritt so wichtig.

Spezielle Strategien in der Analysis

Das würde man auch „Lösungstricks“ nennen, die häufig vorkommen. Sie sind zahlreich und können nicht alle einfach aufgelistet werden. Eine Auswahl:

1. Rückführen auf Bekanntes, das sehr gut verstanden ist, z. B. weil man es sehr leicht explizit ausrechnen kann: das ist etwa die *geometrische Summe bzw. Reihe*, die Beweise der Konvergenzkriterien für Reihen erfolgen durch Vergleich mit der geometrische Reihe, und auch sonst kommt diese immer wieder vor.
2. Man sollte die vorkommenden Terme/Ausdrücke nicht immer bis zum Schluss ausmultiplizieren. Lieber lässt man manche Terme in Gruppen unverändert zusammenstehen, wenn diese irgendwie wichtig erscheinen oder ein Muster/eine Struktur darin erkennt.

Weitere spezielle Strategien

3. Bei Aussagen über Funktionen versucht man sich mit Skizzen im Koordinatensystem, um eine Anschauung zu gewinnen.
4. Rückwärts arbeiten: Von der zu zeigenden Behauptung ausgehend, arbeitet man rückwärts, bis man die Behauptung aus der Voraussetzung und Bekanntem herleiten kann. Danach schreibt man den Beweis „vorwärts“ auf. Man kann auch kombiniert vor- und rückwärts arbeiten.
5. Spezial- oder Extremfälle der Behauptung suchen bzw. Beispiele finden.
6. (Unvollständige) Induktion: Durch Ausrechnen der Fälle $n = 1, 2, 3, \ldots$ versucht man, eine allgemeine Behauptung zu finden, die man dann mit vollständiger Induktion zu beweisen versucht, wenn diese nicht gleich direkt beweisbar ist.
7. Symmetrien oder Invarianten (unter-)suchen und diese ausnutzen (geeignet bezeichnen, Ihre Eigenschaften untersuchen und verwenden).