Notizen vom 29. Januar 2014

(1) Geg.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := |xy|$,

wo ist f partiell db, wo total db?

- Falls $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ auf Koo-achse liegt,
  d.h. $a \neq 0 \neq b$, dann gilt in einer Umgebung von (a,b),

  dass $f(x,y) = xy$ oder $f(x,y) = -xy$
  dort total db.
- Punkte der x-Achse: $(a,0)$ mit $a \neq 0$:
  f nicht partiell db nach y,
  weil $y \mapsto f(a,y) = |a| \cdot |y|$ nicht in 0 db
- analog: y-Achse
- in $(0,0)$: auf Koo-achsen: $f(x,0) = f(y,0) = 0$
  $\Rightarrow f$ in $(0,0)$ partiell db und mit partieller Abl. 0

als affine Approximierende von f in $(0,0)$ kommt nur die Nullabb. in Frage, d.h.

$$0 \equiv f(0,0) + \langle \operatorname{grad} f(0,0), (x,y) \rangle$$

Dies gilt:
$$\frac{|f(x,y) - A \cdot (x,y)|}{\|(x,y)\|} = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y| \xrightarrow{(x,y)\to 0} 0.$$

Also ist f total db in $(0,0)$ mit Abl. $f'(0,0) = 0$.

---

(2) Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung:

$f : \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$,

dabei sind $p, q > 0$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Minimum von f unter der NB $g(x,y) := xy - 1 \rightsquigarrow y = \frac{1}{x}$

Lagrange: nur (x,y) kommen in Frage, für die es Multiplikator λ gibt mit

$$(0,0) = \operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} g(x,y)$$
$$= (x^{p-1}, y^{q-1}) + \lambda (y,x)$$

$\rightsquigarrow x^p = -\lambda y x = y^q$, mit $xy = 1$ folgt $x = y = 1$.

$\rightsquigarrow$ Stelle $(1,1)$,
da $f(x,y) \to \infty$ für $\|(x,y)\| \to \infty$, hat
f auf der Hyperbel $\{xy = 1\}$ ein globales Minimum. ✓

Bem.: auch als 1-dimensionales Extremwertproblem formulierbar mit $f(x) = \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x^q}$

(3) Bsp. impl. Funktionensatz:

In welchen Punkten des $\mathbb{R}^3$ ist das Glgs.system

$$x^2 - y^2 = 0$$
$$y^2 - z^2 = 0$$

wonach auflösbar?

Beh.: in $(1,1,1)$ ist es lokal nach (y,z) auflösbar, Ableitung der Auflösungsfkt. dort?

Bew.:

Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \end{pmatrix}$.

Dann:

$$f'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 2y & -2z \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ in allen Punkten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach

je zwei Koordinaten auflösbar, da jede 2×2-Unterdeterminante $\neq 0$ ist

Etwa: $(y,z) = g(x) = (y(x), z(x))$:

$$g'(x) = -\begin{pmatrix} D_2 f_1 & D_3 f_1 \\ D_2 f_2 & D_3 f_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} D_1 f_1 \\ D_1 f_2 \end{pmatrix}(x) = \frac{1}{4yz} \cdot \begin{pmatrix} 2z & 0 \\ 2y & 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4yz} \begin{pmatrix} 4xz \\ 4xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/y \\ x/z \end{pmatrix}.$$

speziell $g'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bei $(1,1,1)$

(4) Bsp. lokalen Umkehrsatz:

$E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gelochte Ebene, $f: E \to E$,

$$f(x,y) := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

(Spiegelung am Einheitskreis)

f ist in allen Punkten von E lokal umkehrbar:

$$Df\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underset{r^2 = x^2+y^2}{=} \frac{1}{r^4} \cdot \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix},$$

$\det Df\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{r^4} \neq 0$ für alle $(x,y) \in E$.

Auch global umkehrbar: $f \circ f = id_E$, d.h. $f^{-1} = f$.

(5) Noch ein Bsp. zu Extremwertaufgaben im $\mathbb{R}^n$:

Bemerkenswertes Bsp.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$

Beh.: • f hat auf allen Geraden durch $(0,0)$ ein Minimum in $(0,0)$

• $(0,0)$ ist kein lokales Minimum von f.

Bew.:

• Betr. Ursprungsgerade $(x,y) = t \cdot (a,b)$, $t > 0$ und $a,b \in \mathbb{R}$ fest

Dort hat f die Fkt.werte
$$g(t) = f(x(t), y(t)) = f(ta, tb) = 2a^2t^2 - 3ab^2t^3 + b^4t^4$$

$$\rightsquigarrow g'(t) = 4a^2t - 9ab^2t^2 + 4b^4t^3$$
$$g''(t) = 4a^2 - 18ab^2t + 12b^4t^2$$

$$\rightsquigarrow g(0) = g'(0) = 0, \quad g''(0) = 4a^2 > 0$$

für $a \neq 0$ liegt dort bei $t=0$ ein Min. vor.

Falls $a = 0$, $b = 1$ und $g'''(0) = 0$, $g^{(4)}(0) = 36 > 0$, auch in diesem Fall hat g ein Min. bei $t=0$.

• f hat kein lokales Minimum in $(0,0)$:
$$f(x,y) = (y^2 - x)\cdot(y^2 - 2x)$$

$\rightsquigarrow$ nahe $(0,0)$ hat f negative Werte: etwa $f(\varepsilon, \frac{2}{3}\varepsilon^2) = \underbrace{(\varepsilon^2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2)}_{>0}\cdot\underbrace{(\varepsilon^2 - \frac{4}{3}\varepsilon^2)}_{<0} < 0$

als auch positive Werte: etwa $f(\varepsilon,\varepsilon) = \underbrace{(\varepsilon^2 - \varepsilon)}_{<0}\cdot\underbrace{(\varepsilon^2 - 2\varepsilon)}_{<0} > 0$