Repetitorium WiSe 2013/14

23.10.2013

Analysis-Teil:

Folgen, Grenzwerte, Supremum, Infimum

Schranken: Sei $A \subseteq K$, K ein angeordneter Körper $(K, +, \cdot, <)$ ← transitiv + trichotomisch

$C \in K$ ist obere Schranke von A :$\Leftrightarrow$ $\forall a \in A: \ a \leq C$ (C ist o.S.)

$C \in K$ " untere Schranke von A :$\Leftrightarrow$ $\forall a \in A: \ a \geq C$ (C ist u.S.)

A ist nach oben beschränkt :$\Leftrightarrow$ $\exists C \in K$: C ist obere Schranke

A " " unten " :$\Leftrightarrow$ $\exists C \in K$: C " untere "

A " beschränkt :$\Leftrightarrow$ A nach oben und nach unten beschränkt

$m \in A$ ist maximales Element von A :$\Leftrightarrow$ $\forall a \in A: \ a \leq m$ (eigentlich "größtes El.")

$m \in A$ " minimales " " A :$\Leftrightarrow$ $\forall a \in A: \ m \leq a$ (" "kleinstes El.")

Notation: $m = \max A$, falls m maximales El. von A,
$m = \min A$, " m minimales " " A.

[Beachte: $\min \emptyset$, $\max \emptyset$ ex. nicht]

Bem.: Eine o.S., die in A enthalten ist, ist maximales El. [entsprechend u.S.]

$s \in K$ ist Supremum von A :$\Leftrightarrow$ $s = \min \{C \in K;\ C \text{ ist o.S. von } A\}$,
d.h. s ist die kleinste obere Schranke von A

$s \in K$ " Infimum " A :$\Leftrightarrow$ $s = \max \{C \in K;\ C \text{ ist u.S. von } A\}$,
d.h. s ist die größte untere Schranke von A

Notation: $s = \sup A$, falls s Supremum von A,
$s = \inf A$, " s Infimum " A.

Bsp.: $A := [1, 2[\ \Rightarrow \inf A = \min A = 1$, $\sup A = 2$, $\max A$ ex. nicht

Bem.:
- $m = \max A \Rightarrow m = \sup A$, analog inf/min
- sup/inf eindeutig ← falls existent!
- $s = \sup A \notin A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A: \ s - \varepsilon < a \leq s$, analog inf
- $A \subseteq B \subseteq K \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$
- $\inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\} \leq \inf A \cap B$
  $\leq \sup A \cap B \leq \max\{\sup A, \sup B\} = \sup A \cup B$
- $A, B \subseteq K \Rightarrow \inf(A + B) = \inf A + \inf B \leq \sup A + \sup B = \sup(A + B)$
- $A, B \subseteq K_{\geq 0} \Rightarrow \inf(A \cdot B) = (\inf A) \cdot (\inf B) \leq (\sup A) \cdot (\sup B) = \sup(A \cdot B)$

Folgen und Konvergenz:

In einem angeordneten Körper K (insb. $K=\mathbb{R}$) läßt sich der (Absolut-) Betrag definieren als
$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} := \max\{x, -x\}$$

Damit gilt:
(1) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(2) $|x| = |-x|$, $|xy| = |x| \cdot |y|$
(3) $|x+y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung
(4) $||x| - |y|| \leq |x+y|$ Dreiecksungleichung "nach unten"

Eine Abb. $a: \mathbb{N} \to K$ heißt Folge in K. Notation: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Ab jetzt: $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt., falls $\exists c \in K$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. gegen c

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen c $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: |a_n - c| < \varepsilon$
(Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_0, ab dem alle Abstände $|a_n - c| < \varepsilon$ sind.)

Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} c$. Die Zahl $c \in K$ heißt Grenzwert der Folge.

Bem.: • $c = \lim a_n \Leftrightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $|a_n - c| < \varepsilon$ für fast alle n
$\Leftrightarrow$ " $\varepsilon > 0$ " $|a_n - c| \geq \varepsilon$ " höchstens endlich viele n.

- Eine Folge hat höchstens einen GW. Sie heißt divergent, falls sie nicht kgt.
- Konvergente Folgen sind beschränkt, unbeschränkte Folgen sind divergent.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge $:\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Cauchy-Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Konvergent $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon$
(Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_0, ab dem alle Abstände $|a_n - a_m| < \varepsilon$ sind.)

Uneigentliche Konvergenz / bestimmte Divergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty :\Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: a_n > C$
  " $-\infty :\Leftrightarrow$ " " $a_n < C$

Bem.: • $A(n)$ gilt für alle hinreichend großen n $:\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: A(n)$ wahr
• $A(n)$ gilt für unendlich viele n $:\Leftrightarrow \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0: A(n)$ wahr

$\boxed{\text{streng}}$ ... ... $\boxed{<, >}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend $:\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$
" " " fallend $:\Leftrightarrow$ " $a_n \geq a_{n+1}$

Vollständigkeitsaxiom: $\mathbb{R}$ hat die Vollständigkeitseigenschaft, d.h. vollständig.
Ein angeordneter Körper K heißt vollständig, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist (und damit alle):
(1) Jede Teilmenge $M\neq\emptyset$ von K, die eine o.S. in K hat, hat ein Supremum in K.
(2) Jede monoton wachsende Folge aus K, die eine o.S. in K hat, konvergiert gegen ein $c\in K$.
(3) K ist archimedisch (d.h. $\forall x\in K\ \forall b\in K_{>0}\ \exists n\in\mathbb{N}: nb > x$) und jede Cauchy-Folge konvergiert gegen ein $c\in K$.
(4) K ist archimedisch und im Durchschnitt jeder Intervallschachtelung liegt genau ein Element. Dabei ist eine Intervallschachtelung eine Folge abgeschlossener, ineinandergeschachtelter Intervalle, deren Länge $\to 0$

Bem: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ sind archimedisch, daher kann in der Formulierung für $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{Q}$ dies in (3) und (4) weggelassen werden. Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn in ihm alle Cauchyfolgen konvergieren.

Beispiele:
- $\mathbb{R}$ vollständig,
- $\mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ (als metrischer Raum, sind keine angeordn. Körper!) vollständig
- $\mathbb{Q}$ nicht vollständig, da die Folge $1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142\ldots$ (die in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ geht) nicht konvergiert ($\to$ vgl. Bed. (2))

Konvergenzkriterien:
- Cauchy-Kriterium: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ kgt. $\Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-konvergent
- Monotonie-Kriterium: Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. (Analog: jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge)
- Intervallschachtelungsk.: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen mit $\forall n\in\mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ und $b_n - a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, dann konvergieren beide Folgen gegen das (eind. best.) Element $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.
- Reihenkriterium: $\sum a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Rechenregeln für konvergente Folgen:

GW-Sätze: • $a_n \to a$, $b_n \to b \Rightarrow a_n \pm b_n \longrightarrow a \pm b$

• $a_n \to a$, $b_n \to b$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda a_n + \mu b_n \longrightarrow \lambda a + \mu b$

• Also bilden die reellen konvergenten Folgen einen $\mathbb{R}$-VR $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Kgt.}\}$ haben eine lineare Abb. $V \to \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$.

• Die Summe zweier divergenter Folgen kann konvergent sein!

• $a_n \to a$, $a \neq 0$, alle $a_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$

• Das Produkt einer Nullfolge mit einer beschränkten Folge ist wieder eine Nullfolge.

• Vergleichslemma / Monotonie des Grenzwerts:

$a_n \to a$, $b_n \to b$, $a_n \leq b_n$ ab einem Index $n_0 \Rightarrow a \leq b$

Achtung: Aus $a_n < b_n$ für alle n folgt nicht $a < b$, Bsp: $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$

• "Sandwich"-Lemma / Quetschlemma:

$a_n \to a$, $b_n \to a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ ab einem $n_0 \Rightarrow c_n \to a$

Teilfolgen und Häufungswerte:

• Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen (d.h. mit: $\forall k \in \mathbb{N}: n_k < n_{k+1}$). Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

• $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungswert (auch "Häufungspunkt") einer reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem Index n_0 ein $n \geq n_0$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

Kurz: a ist HW von $(a_n)_n :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \boxed{\forall} n_0\ \boxed{\exists} n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \infty$ viele n: $|a_n - a| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$.

Bem.: Beachte den Unterschied zum Begriff des Häufungspunkts einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$:

$a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von $M \subseteq \mathbb{R} :\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 : M \cap \{x \in \mathbb{R};\ 0 < |x-a| < \varepsilon\} \neq \emptyset$

- In Worten: a ist HP von M,
  wenn jede ε-Umgebung von a ein El. $\neq a$ aus M enthält.
- Die Zahl a ist dann HW einer Folge von El. aus $M \setminus \{a\}$.
- Ist a HP der Menge $\{a_n;\, n \in \mathbb{N}\}$, so ist a ein HW der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Die Umkehrung ist falsch! Bsp.: Ist $a_n = a$ für alle n, so ist a HW der konstanten Folge (a_n), nicht aber HP der einel. Menge $\{a_n;\, n\in\mathbb{N}\} = \{a\}$.

<u>Satz von Bolzano-Weierstraß für Folgen:</u>
Jede beschränkte reelle Folge besitzt einen Häufungswert in $\mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow$ Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

<u>Satz von Bolzano-Weierstraß für Mengen:</u>
Jede unendliche beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$
besitzt mindestens einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$.

<u>Def. limsup, liminf von Zahlenfolgen:</u>
Der <u>$\limsup a_n$</u> einer nach oben beschr. Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$
ist der <u>größte</u> HW von (a_n).
(Und: <u>$\liminf a_n$</u> einer nach unten beschr. Zahlenfolge ist der <u>kleinste</u> HW).
Es gilt: $\limsup a_n = a \Leftrightarrow a = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\{a_n;\, n>N\}\right) = \inf\limits_{N\in\mathbb{N}} \left(\sup\{a_n;\, n>N\}\right)$

$\Leftrightarrow$ (i) $\forall \varepsilon>0\ \underbrace{\forall N\in\mathbb{N}\ \exists n\geq N}_{\text{es ex. } \infty \text{ viele } n \text{ mit}}:\ a-\varepsilon < a_n$

und (ii) $\forall\varepsilon>0\ \underbrace{\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N}_{\text{gilt für alle hinreichend großen } n}:\ a_n < a+\varepsilon$ $\Big\}$ d.h. $\forall\varepsilon>0$ gilt $a_n > a+\varepsilon$ für höchstens endl. viele n

[Analog für liminf...]

Bsp.: $\liminf \frac{1}{n} = \limsup \frac{1}{n} = 0$

Es gilt: (a_n) kgt. $\Leftrightarrow$ (a_n) beschr. und besitzt genau einen HW
$\Leftrightarrow$ $\liminf a_n$, $\limsup a_n$ ex. beide und sind gleich

<u>Bsp.:</u> $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} (>0) \\ \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$ und $a_0 = -1$. Dann: $\sup\{a_n\} = \max\{a_n\} = \limsup a_n = 1$,
$\inf\{a_n\} = \min\{a_n\} = -1$, $\liminf a_n = 0$.

Lineare-Algebra-Teil:

Lineare Gleichungssysteme (LGS), Eliminationsverfahren von Gauß

Matrizenrechnung:

Eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ über $\mathbb{R}$ ist ein rechteckiges Zahlenschema der Form
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$
wobei die $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Menge der reellen $m \times n$-Matrizen: $\mathbb{R}^{m\times n} := \left\{ (a_{ij});\ a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ für alle } 1 \le i \le m \text{ und } 1 \le j \le n \right\}$

Rechenoperationen dafür: Sind $A = (a_{ij})$, $B := (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}$,

so ist $A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$

und $cA := (ca_{ij}) = \begin{bmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & & \\ ca_{m1} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$

<u>Produkt</u>: Ist $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{kj}) \in \mathbb{R}^{n\times r}$,

so ist
$$AB = A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times r} \text{ mit } c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{für alle } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le r.$$

<u>Bem.:</u> • Spezialfall bei $\mathbb{R}^{m\times n}$: $m = 1 \leadsto \mathbb{R}^{1\times n} = \left\{ (a_{11} \ldots a_{1n});\ a_{1j} \in \mathbb{R} \text{ für alle } 1 \le j \le n \right\}$ (Sind n-Tupel des $\mathbb{R}^n$)

$n = 1 \leadsto \mathbb{R}^{m\times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix};\ a_{i1} \in \mathbb{R} \text{ für alle } 1 \le i \le m \right\}$ (vertikal geschriebene m-Tupel des $\mathbb{R}^m$)

• Für $a = (a_1\ a_2 \ldots a_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ und $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

ergibt $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$ eine reelle Zahl, und $b \cdot a = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$ eine Matrix $\in \mathbb{R}^{n\times n}$

<u>Spezielle Matrizen:</u> Einheitsmatrix: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wo $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Nullmatrix: $O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Obere Dreiecksmatrix: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wo $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$

<u>Rechenregeln für Matrizen:</u> $A+B = B+A$, $(A+B)+C = A+(B+C)$

$(AB)C = A(BC)$, $A+O = O+A = A$, $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$,

$A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$

<u>Zeilenstufenform:</u> $A = \begin{bmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & * & & \\ & O & & * & \\ & & & & * \end{bmatrix}$ Hier: $*$ bezeichnet reelle Zahlen $\neq 0$, die die "Stufenränder" bilden, darunter stehen nur Nullen

Bsp.: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0.5 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0.5 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ist in Zeilenstufenform $\rightsquigarrow$ Rang $= 4$

$(A B)^T = B^T \cdot A^T$

<u>Transponierte Matrix</u> zu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist $A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$

<u>Inverse Matrix:</u> Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ex. eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $AB = BA = I_n$, so heißt B <u>inverse Matrix</u> zu A.

Notation: $B = A^{-1}$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Existiert A^{-1}, so heißt A <u>invertierbar</u>.

Der <u>Rang</u> einer Matrix ist die Dimension des von den Zeilenvektoren (oder Spaltenvektoren!) der Matrix aufgespannten Unterraumes. Kurz: $\operatorname{rg} A \in \mathbb{N}$.

Der Rang ändert sich nicht, wenn eine der folgenden <u>(elementaren)</u> <u>Zeilenumformungen</u> ausgeführt wird:

(1) Vertauschen von Zeilen

(2) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$

(3) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

<u>Rangbestimmung:</u> Bringe eine Matrix in Zeilenstufenform. Die maximale Anzahl lin. unabh. Zeilen (oder Spalten) ist der Rang und läßt sich leicht ablesen.

Ein <u>Lineares Gleichungssystem</u> ist eine Matrizengleichung der Form $Ax = b$, bei der $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m (= \mathbb{R}^{m\times 1})$ gegeben sind und $x \in \mathbb{R}^n (= \mathbb{R}^{n \times 1})$ gesucht.

Ausgeschrieben: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Die Matrix $(A|b)$, bei der man die r.S. b als zusätzliche Spalte rechts an A anklebt, heißt <u>erweiterte Matrix</u> des LGS $Ax = b$.

▷ <u>Lösungskriterium für LGS:</u> $Ax = b$ lösbar $\iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$

Die Lösungsmenge ist dann ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - \operatorname{rg} A$.

Ein quadratisches LGS $Ax = b$ (d.h. mit $m = n$) ist <u>eindeutig</u> lösbar $\iff \operatorname{rg} A = n$

Die Lösungsmenge eines LGS berechnet man mit dem <u>Gaußschen Eliminationsverfahren:</u>

- Bringe die erweiterte Matrix $(A|b)$ auf Zeilenstufenform (nur Zeilenumformungen)
- Dann: a) Löse von unten nach oben nach den Variablen an den Stufenrändern auf
  oder b) Wandle die Spaltenvektoren von rechts nach links (ebenfalls durch elementare Zeilenumformungen) zu Einheitsvektoren um, so dass die Lösung direkt abgelesen werden kann.

Bsp.: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3),\ \cdot(-4) \\ + \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$

Auflösen wie a): 3. Zeile: $5x_3 = 5 \rightsquigarrow x_3 = 1$, 2. Zeile: $x_2 - 5 \cdot 1 = 4 \rightsquigarrow x_2 = 1$,
1. Zeile: $1 \cdot x_1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 \rightsquigarrow x_1 = -1$, Lösung: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Auflösen wie b): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot \frac{1}{5} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

<u>Invertierung von Matrizen:</u> Geg. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gesucht: $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A\cdot X = I_n$

$\rightsquigarrow$ Löse die LGSe $A\cdot\begin{pmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{n1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$, $A\cdot\begin{pmatrix}x_{12}\\ \vdots\\ x_{n2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$, ..., $A\cdot\begin{pmatrix}x_{1n}\\ \vdots\\ x_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$

Methode: <u>Gaußsches Elimverfahren</u> mit erweiterter Matrix $(A|I_n)$

Denn: behandeln so alle rechten Seiten $e_1=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, e_n=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$ gleichzeitig!

$\rightsquigarrow$ Wird auf der l.S. die Einheitsmatrix erzeugt, ist A inv'bar, auf der r.S. steht die inverse Matrix!

$\rightsquigarrow$ Läßt sich die l.S. <u>nicht</u> auf die Einheitsmatrix bringen, ist A <u>nicht</u> invertierbar, hat also keine inverse Matrix.

<u>Merkregel</u> zum Invertieren von Matrizen $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $ad-bc\neq 0$:

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

Bem.: Ist $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, dann hat $Ax=b$ die Lösung $x=A^{-1}b$

wegen $Ax=b \Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I_n}x=A^{-1}b$