Repetitorium WiSe 2013/14

30.10.2013

Analysis-Teil:

Reihen: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ die Folge $a_0,\ a_0+a_1,\ a_0+a_1+a_2,\ \ldots$ von Partialsummen: Schreibe

$$(a_0+\ldots+a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{bzw.} \quad \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{n\text{-te Partialsumme}}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

kurz: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kgt. $\Leftrightarrow$ Partialsummenfolge $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent

Geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad \text{konvergiert für } -1<q<1,$$

Bsp.: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1.$

harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert!

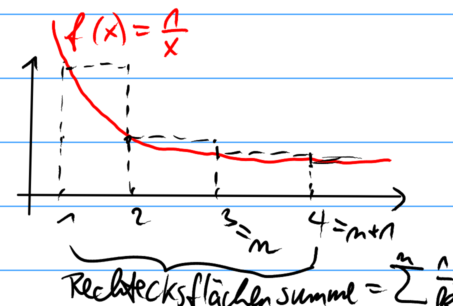
$\sum a_n$ konvergent $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ (a_n) Nullfolge $\Big\}$ Also: $\underbrace{(a_n)\not\to 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ div.}}_{\text{ist ein "Divergenzkriterium"}}$

Das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt:
Dass (a_n) Nullfolge ist, ist kein Konvergenzkriterium für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis, dass $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n}$ divergiert:

- Mit Integralvergleich:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$



- oder Cauchy-Verdichtung (s.u.):
$\sum \frac{1}{n}$ div., weil $\sum 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum 1$ div.

Rechenregeln für Reihen:

- $\sum a_n$ und $\sum b_n$ kgt., $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum (\lambda a_n + \mu b_n)$ kgt.
  [Haben: Menge der kgten Reihen ist $\mathbb{R}$-VR, und die Abb., die einer Reihe ihren Wert $\in \mathbb{R}$ zuordnet, ist linear]
- $\sum a_n$ und $\sum b_n$ kgt., $\forall n: a_n \leq b_n \Rightarrow \sum a_n \leq \sum b_n$
- $\sum a_n$ abs. kgt. $\overset{\otimes}{\Rightarrow} \sum a_n$ kgt. und $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$
- (b_n) beschr. und $\sum a_n$ abs. kgt. $\Rightarrow \sum a_n b_n$ abs. kgt.

$\otimes$ Begründung hier: Cauchy-Kriterium, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m \geq n \geq n_0: \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$
$\Rightarrow$ ebenso: $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$ ✓

$\sum a_n$ absolut konvergent $:\Leftrightarrow \sum |a_n|$ kgt.

Es gilt: • $\sum a_n$ abs. kgt. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \sum a_n$ kgt.
($\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ kgt. nach Leibnizkrit. (s.u.), aber nicht absolut: $\sum |(-1)^n \cdot \frac{1}{n}| = \sum \frac{1}{n}$ div.)

- Die Aussage "(b_n) beschr. und $\sum a_n$ kgt. $\Rightarrow \sum a_n b_n$ kgt." ist falsch:

$$\sum a_n = \sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \text{ kgt.},$$

nimm $b_n := (-1)^n$, dann ist $\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{n}$ divergent.

Konvergenzkriterien: Geg. $\sum a_n$, wann kgt.?

Kriterien, die hinreichend und notwendig sind:

- Monotoniekriterium: Sind alle $a_n \geq 0$, dann: $\sum a_n$ kgt. $\Leftrightarrow$ Partialsummenfolge $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

- Cauchy-Verdichtungskriterium, s.u.

(a_n) Cauchyfolge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n,m \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$

$\sum a_n$ Cauchy-kgt. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m \geq n \geq n_0 : |\underbrace{\sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k}_{\sum_{k=n}^{m}}| < \varepsilon$

- Cauchy-Kriterium: $\sum a_n$ kgt. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m \geq n \geq n_0 : |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$
  (d.h. die Partialsummenfolge ist eine Cauchyfolge)

- Integral-Kriterium: Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton fallend.
  Dann: $\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k)$ kgt. $\Leftrightarrow \int_{n_0}^{\infty} f(t)\,dt$ kgt. [$\Rightarrow \sum \frac{1}{k}$ div., da $\underbrace{\int_{n_0}^{\infty} \frac{dt}{t}}$ div.]

Kriterium für nicht notwendig absolut konvergente Reihen:

- Leibniz: alle $a_n \geq 0$, (a_n) mon. fallend, $a_n \to 0 \Rightarrow \underbrace{\sum (-1)^n a_n}_{\text{"alternierende Reihe"}}$ kgt.
  [Zusatz: Reihenreste erfüllen
  $$\left|\sum_{n=n_0}^{m} (-1)^n a_n\right| \leq a_{n_0} \text{ und } \left|\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n\right| \leq a_{n_0}.]$$

Monotonie von (a_n) wesentlich! z.B. $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$, $a_{2n+1} = \frac{1}{n} \rightsquigarrow$ Reihe $\sum (-1)^n \overset{\text{Nullfolge}}{\widehat{a_n}}$ div.

Vergleichskriterien:

- Majoranten: $\underbrace{\sum c_n}_{\text{"Konvergente Majorante"}}$ kgt., alle $c_n \geq 0$,
  $|a_n| \leq c_n$ für alle hinr. gr. $n \Rightarrow \sum a_n$ abs. kgt.

- (Cauchy-) Verdichtung: alle $a_n \geq 0$, (a_n) mon. fallend.
  Dann: $\sum a_n$ kgt./div. $\Leftrightarrow \sum 2^n a_{2^n}$ kgt./div.

Durch Vergleich mit der geometrischen Reihe erhält man folgende Kriterien:

- Quotienten: $\forall n : a_n \neq 0$, $\exists 0 < \theta < 1 : \forall n : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta \Rightarrow \sum a_n$ abs. kgt.
  (Insbesondere, wenn $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ kgt. und $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ist.) $[\left|\frac{a_n}{a_1}\right| \leq \theta^{n-1} \Rightarrow \sum |a_n| \leq |a_1| \cdot \underbrace{\sum \theta^{n-1}}]$

- Wurzel: $\exists 0 < \theta < 1 : \forall n : \sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta \Rightarrow \sum a_n$ abs. kgt.
  (Insbesondere, wenn $\sqrt[n]{|a_n|}$ kgt. und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ ist.) $[\sum |a_n| \leq \overbrace{\sum \theta^n} = \frac{1}{1-\theta}]$

<u>Bem.:</u> • Ist $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, so heißt $\sum a_{\varphi(n)}$ <u>Umordnung</u> von $\sum a_n$

• Umordnen von Reihen kann Konvergenzverhalten und Grenzwert ändern!

"<u>Um-ordnungs-sätze</u>"
- • Aber: $\sum a_n$ absolut kgt. $\Rightarrow$ jede Umordnung $\sum a_{\varphi(n)}$ kgt. gegen $\sum a_n$
- • Und: $\sum a_n$ kgt., nicht abs. kgt., $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
  $\Rightarrow$ es ex. eine Umordnung $\sum a_{\varphi(n)}$ mit (ev. uneigentl.) Grenzwert σ

<u>Teleskopreihe:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$

Partialsummen: $\sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n-1}) = a_N - a_0$ bzw. $\sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{N+1}$

Sie konvergieren genau dann, falls $\lim_{N\to\infty} a_N =: a$ existiert.
Ihr GW ist dann $a - a_0$ bzw. $a_1 - a$.

<u>Bsp.:</u> $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 1$, also: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

<u>Klammersetzen in Reihen:</u> Geg.: Reihe $\sum a_n$, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng mon. wachsend, $n_1 = 1$

Die Trennindizes n_k zerlegen $\sum a_n$ in die Reihenabschnitte $b_k := (a_{n_k} + a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_{k+1}-1})$

$\rightarrow$ Die Reihe $\sum b_k$ geht aus $\sum a_n$ durch Klammersetzen hervor!

- Klammersetzen in einer konvergenten Reihe ändert nicht ihren Wert.
  ⌜Die Partialsummenfolge der geklammerten Reihe ist eine Teilfolge der ursprünglichen Partialsummenfolge.⌟
- Klammersetzen in einer divergenten Reihe: es können kgte Reihen entstehen,
  Bsp.: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\text{keine Nullfolge!}}$ divergiert, aber $(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 0+0+\ldots = 0$,
  und $-1 + (1+-1) + (1+-1) + \ldots = -1 + 0 + 0 + \ldots = -1$.

<u>Doppelfolgen und -Reihen:</u> Eine Abb. $a: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(j,k) =: a_{j,k} \in \mathbb{R}$ heißt <u>Doppelfolge</u>. Sie <u>kgt. gegen</u> $c \in \mathbb{R}$ $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0: |a_{n,m} - c| < \varepsilon$

Eine <u>Doppelreihe</u> $\sum_{j,k=1}^{\infty} a_{j,k}$ ist die Doppelfolge der Partialsummen $S_{n,m} := \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{j,k} \right)$.

- Ist $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijektiv,
  so heißt $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ eine <u>Aufzählung</u> der Doppelreihe $\sum a_{n,m}$.

- Eine Doppelreihe kgt. $\Leftrightarrow$ kgt. bezüglich jeder Aufzählung

<u>Cauchyscher Doppelreihensatz:</u> Ist $\sum_{j,k=1}^{\infty} a_{j,k}$ bzgl. einer Aufzählung <u>abs.</u> kgt., so auch bzgl. jeder Aufzählung, immer mit demselben GW.
Insb.: $\sum_{j,k=1}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k} \right)$

<u>Produkt zweier Reihen:</u> Die Doppelreihe $\sum_{j,k} a_j b_k$ und auch irgendeine ihrer Aufzählungen heißt <u>Produkt</u> der Reihen $\sum_j a_j$ und $\sum_j b_j$.

<u>Speziell:</u>

▷ <u>Cauchyprodukt zweier Reihen:</u>
Sind $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen und $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
$= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$.
Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ das <u>Cauchyprodukt</u> der beiden Ausgangsreihen.

Bem.:

$$\begin{array}{llll} & a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 \quad \ldots \\ c_0 & a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 \quad \ldots \\ c_1 & a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 \quad \ldots \\ c_2 & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

<u>Cauchyproduktsatz (aus Doppelreihensatz):</u>
Produkt zweier <u>abs.</u> kgt. Reihen ist abs. kgt., insb. ihr Cauchyprodukt,
d.h. dann: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$.

<u>Ergänzungen:</u>
- $\mathbb{C}$ ist <u>nicht anordenbar</u> ⌈nicht so, dass diese die Anordnung von $\mathbb{R}$ fortsetzt: Denn: • $0 < i \Rightarrow 0 = 0 \cdot i < i \cdot i = -1$ ↯,
  ebenso: $i < 0 \Rightarrow -i > 0 \Rightarrow 0 = 0 \cdot (-i) < (-i) \cdot (-i) = -1$ ↯ (Monotonie der Multipl.)⌋
- <u>Beweisidee für Bolzano-Weierstraß (für Folgen)</u>: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.
  Eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) ist durch eine monotone Teilfolge geg. (kgt. wg. Vollst.-axiom).
  Konstruktion so: a_s heißt <u>Spitze</u> $:\Leftrightarrow \forall m > s: a_s \geq a_m$

▷
- Falls unendlich viele Spitzen ex., ist die Teilfolge der Spitzen monoton fallend,
- sonst gilt, falls s der größte Spitzenindex (oder 1) ist, dass ex. $s < m_1 < m_2 < \ldots$ mit $a_{m_1} < a_{m_2} < a_{m_3} \ldots$,
  da nach s keine Spitzenstellen mehr kommen. Also ist (a_{m_k}) mon. steigend.