06.11.13

Repetitorium WiSe 2013/14

Lineare Algebra-Teil:

<u>Lineare Abbildungen:</u> Seien V und W VRe über einem Körper K.
Eine Abb. $f: V \to W$ heißt <u>linear</u> (bzw. <u>Homomorphismus</u>),
falls gilt: (L1) $\forall x, y \in V: f(x+y) = f(x) + f(y)$,
(L2) $\forall x \in V \; \forall \alpha \in K: f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

- Für eine lineare Abb. gilt stets $f(0) = 0$ (da $f(0) + f(x) = f(0 + x) = f(x)$).
- Einschränkungen linearer Abb.en auf UVRe sind wieder lineare Abb.en.

Ein injektiver Homomorphismus heißt <u>Monomorphismus</u>,
" surjektiver " " <u>Epimorphismus</u>,
" bijektiver " " <u>Isomorphismus</u>,
(Im letzten Fall heißt V und W <u>isomorph</u>.)
" Homomorphismus $f: V \to V$ heißt <u>Endomorphismus</u>,
" bijektiver Endomorphismus heißt <u>Automorphismus</u>.

<u>Bsp.:</u> $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x-y, x+y)$ ist linear,
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x-y, 1+x)$ ist nicht linear,
$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ ist $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear ($\overline{i \cdot 1} = \bar{i} = -i$,
aber $i \cdot \bar{1} = i$)

<u>Bem.:</u> Lineare Abbildungen $f: V \to W$ sind durch die Angabe der Bilder $f(v_i)$ auf einer Basis $\{v_i\}_{i \in I}$ eindeutig definiert!
Denn ist $v \in V$ beliebig, etwa $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$, muss gelten:
$$f(v) = f\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = \sum_i \lambda_i f(v_i).$$
Eine andere Wahl gibt es nicht, da die λ_i mit v eindeutig bestimmt sind.

Kern und Bild einer Linearen Abb. $f: V \to W$
sind $\ker f := \{x \in V \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$
und $\operatorname{im} f := f(V) = \{y \in W \mid \exists x \in V : f(x) = y\}$
Dann: $\ker f$ ist UVR von V, da die Abgeschlossenheit bzgl. $+, \cdot$ (und $0 \in \ker f$) aus der Linearität von f folgt; analog ist $\operatorname{im} f$ ein UVR von W.

Satz: $f: V \to W$ Hom. Dann: f injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$.
Bew.: "$\Rightarrow$": Ist f injektiv, hat $0 \in W$ nur das Urbild 0, d.h. $\ker f = \{0\}$.
"$\Leftarrow$": Ist $\ker f = \{0\}$ und $f(x) = f(y)$, so folgt $f(x-y) = 0$,
also $x - y \in \ker f = \{0\}$, also $x - y = 0$, also $x = y$. $\square$

Dimensionsformel/Rangsatz: Sei V endlich-dim., $f: V \to W$ linear.
Dann gilt:

$$\boxed{\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V.}$$

Die Dimension des Bildes (d.h. der Rang von f) ist also nie größer als die Dimension des Urbildraumes V. Bem.: $\dim \operatorname{im} f$ heißt Rang von f.

Beweis: Nimm Basis $v_1, \dots, v_r$ von $\ker f$,
ergänze diese (nach Steinitz) zu Basis $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ von V.
Dann ist durch $f|L(v_{r+1}, \dots, v_n): L(\underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}) \to \operatorname{im} f$,
ein Isomorphismus gegeben: Hom. klar,
- ist injektiv: $f(v) = 0$ mit $v \in L(v_{r+1}, \dots, v_n) \Rightarrow v \in \ker f \cap L(v_{r+1}, \dots, v_n)$
$\Rightarrow v \in L(v_1, \dots, v_r) \cap L(v_{r+1}, \dots, v_n) = \{0\}$, also $v = 0$.
- ist surjektiv: Ist $w \in \operatorname{im} f$ mit $f(v) = w$ für $v \in V$, so ist
$v \in L(v_1, \dots, v_n)$, also $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + \sum_{j=r+1}^{n} \mu_j v_j$.
setze $v' := \sum_{j=r+1}^{n} \mu_j v_j \in L(v_{r+1}, \dots, v_n)$,
dann ist $f(v') = f(v - \sum \lambda_i v_i) = f(v) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underbrace{f(v_i)}_{=0} = f(v) = w$.

Somit ist $\dim \operatorname{im} f = n - r = \dim V - \dim \ker f$. $\square$

fakultativ

Alternativer Beweisgang: Mit Homomorphiesatz, Idee:

Dazu braucht man: 1. Quotientenvektorräume: Def. von V/U kennen

2. Dim.formel mit QuotientenVRen: $\dim V/U + \dim U = \dim V$

[mit $U = \ker f$ folgt gewünschte Formel]

3. Bew. von 2. mit Homomorphiesatz: $V/\ker f \cong \operatorname{im} f$

Zu 1. Quotientenvektorräume:

Ist U ein UVR von V, so ist die Faktormenge $V/U := \{x + U \mid x \in V\}$ ein VR bzgl. $+, \cdot$, die def. werden durch

$$(x+U) + (y+U) := (x+y) + U$$

$$\alpha \cdot (x+U) := (\alpha x) + U \quad \text{für } x, y \in V, \alpha \in K.$$

(Wohldefiniertheit, da U ein UVR von V ist).

Die Faktormenge V/U heißt Quotientenraum.

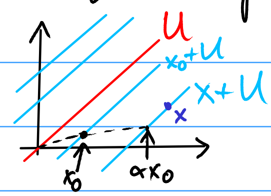
Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$, $U = \binom{1}{1} \cdot \mathbb{R} = \{\binom{x}{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ die Gerade durch 0 und $\binom{1}{1}$.

Dann ist $V/U = \{x + U \mid x \in V\}$ die Geradenschar der zu U parallelen Geraden.

Diese bildet wieder einen $\mathbb{R}$-VR gemäß

$$(x_1 + U) + (x_2 + U) = (x_1 + x_2) + U,$$

$$\alpha \cdot (x + U) = (\alpha x) + U.$$



Es ist hier $\dim V/U = 1$, denn jedes $\{x_0 + U\}$ mit $x_0 \notin U$ bildet Basis:

{Für $x + U \in V/U$ mit $x \notin U$ ist $x = \alpha x_0 + u$ für ein $\alpha \in K$, $u \in U$,

also $x + U = \alpha x_0 + U = \alpha \cdot (x_0 + U)$, d.h. $\{x_0 + U\}$ erzeugt V/U.}

Satz: Sind U, W UVRe von V mit $V = U \oplus W$. Dann: $W \cong V/U$ und $U \cong V/W$.

Bew.: mit Hom.satz: Jedes $v \in V$ ist eindeutig schreibbar als $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$. Betr. $f : V \to V$, $v \mapsto w$ mit $v = u + w$. Dann $\operatorname{im} f = W$, $\ker f = U$, und $V/U = V/\ker f \cong \operatorname{im} f = W$ nach Hom.satz. $\square$

Zu 2.: Korollar: Wegen $V = U \oplus W$ folgt $\dim V = \dim U + \dim W = \dim U + \dim V/U$, also 2.

Mit $U = \ker f$ folgt der Rangsatz/Dimensionsformel.

Homomorphiesatz: Seien V, W zwei K-VRe, $f: V \to W$ linear.
Dann: Ist f surjektiv, so gilt $V/\ker f \cong W$.
Bew.: Haben:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & W \\ V/\ker f \arrow[ur, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

mit kanonischer Abb. $k: V \to V/\ker f$, $v \mapsto v + \ker f$
und lin. Abb. $\bar{f}: V/\ker f \to W$, $v + \ker f \mapsto f(v)$ [wohldef.]

Dann: $f = \bar{f} \circ k$ und $\bar{f}$ injektiv und surjektiv. □

Anwendung des Rangsatzes:

- Sei $f: V \to V$ lin., $\dim V$ endlich. Dann: f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv.

Bew.: $\dim V = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f$ zeigt:
f injektiv $\Leftrightarrow \ker f = \{0\} \Leftrightarrow \dim V = \dim \operatorname{im} f \Leftrightarrow \operatorname{im} f = V \Leftrightarrow f$ surjektiv. □
$\operatorname{im} f \subseteq V$

- Gilt nicht wenn $f: V \to W$ linear: $V = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}[X]$, $f(v) = 2v$ inj., nicht surj.
- Gilt nicht wenn $f: V \to V$ linear, $\dim V = \infty$: $V = K[X]$, $f(\sum a_i X^i) = \sum a_i X^{i+1}$ inj., nicht surj.

- Jeder VR V mit $\dim V = n$ ist isom. zu K^n: K^n hat kanonische Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$.
Jede Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V liefert Isomorphismus $f: V \to K^n$, $f(v_i) = e_i$.
[Surjektiv klar, injektiv wegen Rangsatz: $\dim \ker f = \dim V - \dim \operatorname{im} f = 0$.]
- Somit auch: $f: V \to W$ lin., $\dim V = \dim W$ endlich. Dann: f injektiv $\Leftrightarrow f$ surjektiv.

Zusammenhang zwischen Linearen Abbildungen und Matrizen:

- Idee: Eben gesehen: Zu V mit $\dim V = n$ existiert zu jeder Basis $\mathcal{B} = \{v_i\}$ in V eindeutig ein Isomorphismus $\beta_{\mathcal{B}}: V \to K^n$, mit $\beta_{\mathcal{B}}(v_i) = e_i$ (der i-te Einheitsvektor). Also: $\beta_{\mathcal{B}}(\sum \lambda_i v_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Somit kann eine beliebige lin. Abb. $f: V \to W$ beschrieben werden durch die Abbildung ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}: K^n \to K^m$, wenn V die Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und W die Basis $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ hat.

Bild:

$$\begin{tikzcd} \overset{\mathcal{B}}{V} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, phantom, "\shortparallel"] & \overset{\mathcal{C}}{W} \arrow[d, "\beta_{\mathcal{C}}"] \\ K^n \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}"'] & K^m \end{tikzcd}$$

Wenn ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$ die e_i auf die $\beta_{\mathcal{C}}(f(v_i))$ abbildet, "stellt ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$ die Abb. f dar als Abb. von K^n in K^m."

Die Abb. ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}} : K^n \to K^m$ wird so auch definiert: ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}(e_i) := \beta_{\mathcal{C}}(f(v_i))$, durch Angabe der Bilder auf den Basisvektoren ist ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$ erklärt.

<u>Satz:</u> Jede lineare Abb. $g: K^n \to K^m$ wird durch eine Matrixmultiplikation beschrieben, d.h. ex. $A \in K^{m \times n}$: $g(x) = A \cdot x$,
nämlich: Die Spalten dieser Matrix sind die Bilder $g(e_i)$ der Einheitsvektoren.

<u>Bew.:</u> Durch g und $x \mapsto A \cdot x$ sind lineare Abb. gegeben. Um zu zeigen, dass diese gleich sind, genügt der Vergleich auf den e_i:
Es ist $g(e_i) = A \cdot e_i$, da beim Multiplizieren einer Matrix A mit e_i gerade die i-te Spalte von A herauskommt. $\square$

- Aufgrund dieses Satzes gehört zu ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$ auch eine beschreibende Matrix, ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ genannt (auch andere Notationen möglich).
- Die i-te Spalte dieser Matrix ist gerade der Vektor $\beta_{\mathcal{C}}(f(v_i)) \in K^m$.
- <u>Bsp.:</u> $f: K^2 \to K^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ x+y \end{pmatrix}$ hat bzgl. den Basen $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ die Darstellung ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}(x) = A \cdot x$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
  denn $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \beta_{\mathcal{C}}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
  und $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \beta_{\mathcal{C}}(f(v_2)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- <u>Bem.:</u> Der Vektor $\beta_{\mathcal{C}}(w)$ heißt auch <u>Koordinatenvektor</u> des Vektors w bzgl. der Basis $\mathcal{C}$, andere Notation: ${}_{\mathcal{C}}[w]$ $\left(= \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}, \text{ wenn } w = \sum \lambda_i w_i,\ \mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\} \right)$
- Haben Formel ${}_{\mathcal{C}}[f(v)] = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[v]$,
  überprüfe auf v_i: $\text{l.S.} = \beta_{\mathcal{C}}(f(v_i)) = {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}(e_i) = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot e_i = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[v_i] = \text{r.S.}$ ✓
- Für andere Basen kommen i.A. auch andere Matrizen heraus!

Was genau passiert bei einem <u>Basiswechsel</u>?
Wozu ist die Matrixdarstellung einer lin. Abb. f gut?
$\to$ nächstes Mal!