13.11.13

Repetitorium WiSe 2013/14

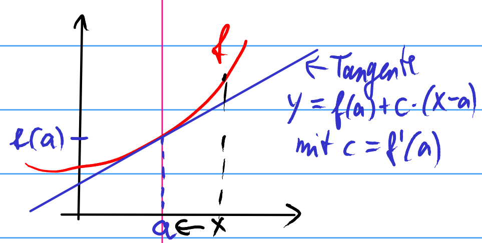
Analysis-Teil:

Differenzierbarkeit

manche Dozenten nehmen für D nur offene IVe, vgl. Bem. ☒ S.-2/3 – (ist technische Feinheit)

Geg.: $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ ein Häufungspunkt von D

f in a diff'bar $:\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert (nennen GW dann $f'(a)$)



$\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert (GW ist $f'(a)$)

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ R: D \to \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to a} \frac{R(x)}{x-a} = 0$: $f(x) = f(a) + \underbrace{c}_{c=f'(a)}(x-a) + \underbrace{R(x)}_{\text{(Rest)}}$ } vgl. Ana 2

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ heißt Differenzenquotient, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$ heißt Differentialquotient bzw. Ableitung

f diff'bar $:\Leftrightarrow \forall a \in D: f$ in a diff'bar

f stetig diff'bar $:\Leftrightarrow f$ diff'bar und f' stetig $\leadsto \mathcal{C}^1(D) := \{f: D \to \mathbb{R};\ f$ stetig diff'bar$\}$

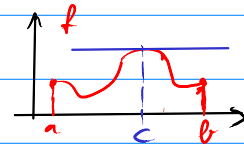
Rechenregeln für Ableitung: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Produktregel:	$(f\cdot g)' = f'g + fg'$	• $\sin' = \cos$
Quotientenregel:	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	• $\cos' = -\sin$
Kettenregel:	$(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'$	• $\exp' = \exp$
Abl. der Umkehrfkt.:	$(f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$	• $(x^n)' = nx^{n-1}$

⌈Bsp.: $\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log y)} = \frac{1}{\exp(\log y)} = \frac{1}{y}$ ⌋

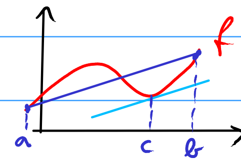
- $\boxed{f \text{ diff'bar in } a \Rightarrow f \text{ stetig in } a}$ $\not\Leftarrow$ (nicht „$\Leftarrow$", vgl. $f(x)=|x|$)
- Begründung: f diff'bar in $a \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ex. $\Rightarrow \lim_{x\to a}\overbrace{(f(x)-f(a))}^{\text{Zähler des Differenzenquotienten}}=0 \Rightarrow f$ stetig in a
- es gibt [komplizierte] stetige Funktionen, die nirgends diff'bar sind

Satz von Rolle: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff'bar, $f(a)=f(b)$
$\Rightarrow \exists c\in\,]a,b[\,: f'(c)=0$



1. MWS: (Mittelwertsatz) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff'bar $\Rightarrow \exists c\in\,]a,b[\,: f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Jede Sehnensteigung ist Tangentensteigung in einem Zwischenpunkt.



Korollar: $\forall x\in\,]a,b[\,: f'(x)=0 \Rightarrow \exists c\in\mathbb{R}\ \forall x\in\,]a,b[\,: f(x)=c$,
d.h. f konstant [da alle $f(y)=f(x)$]

[MWS $\Rightarrow$ Rolle, oft wird Rolle vor MWS bewiesen]

Anwendungen:

Monotonie: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff'bar,

aus MWS: VZ von f' gibt VZ von $f(y)-f(x)$ vor (für $y-x>0$)

$\forall x\in\,]a,b[\,: f'(x)>0 \Rightarrow f$ s.m.w. (nicht „$\Leftarrow$", Bsp. x^3)
" $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow f$ m.w.
" $f'(x)<0 \Rightarrow f$ s.m.f. (nicht „$\Leftarrow$", Bsp. $-x^3$)
" $f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow f$ m.f.
" $f'(x)=0 \Leftrightarrow f$ konstant (vgl. MWS-Kor.)

Extrema und Abl.:

nur, falls x_0 kein IV-Randpunkt! ☒

Bsp. x^3 $\not\Leftarrow$

wird im Rolle-Beweis benutzt, Bew. s. S. -3-

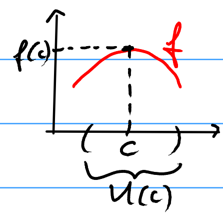
- f in x_0 diff'bar und f in x_0 lokales Extremum (Min. oder Max.) $\Rightarrow f'(x_0)=0$
- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zweimal diff'bar in $x_0\in\,]a,b[$,
  $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Rightarrow f$ hat lokales Minimum in x_0
  (Bsp.: $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$, $f''(x)=2>0$)
  " " <0 " Maximum "
- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff'bar und f' VZWechsel in $x_0 \Rightarrow f$ hat lokales Extremum in x_0

Beweis des 1.MWS: Rolle anwenden auf $h:[a,b]\to\mathbb{R}$,
$$h(x):=(b-a)f(x)-(f(b)-f(a))\cdot x$$
Vor. von Rolle erfüllt: $h(a)=bf(a)-af(b)=h(b) \overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists\, c: h'(c)=0$.
Es folgt $0=h'(c)=(b-a)f'(c)-(f(b)-f(a))$, die Beh. $\square$

Beweis von Rolle: Nach Max/Min-Prinzip wird Max/Min von f angenommen,
d.h. $M=\max\{f(x);\, x\in[a,b]\}$ und $m:=\min\{f(x);\, x\in[a,b]\}$ sind Fkt.werte.
1. Fall: $M=m \Rightarrow f$ konstant $\Rightarrow$ überall $f'=0$ ✓
2. Fall: $m<M$ und $m=f(a)$. Dann ist $f(c)=M$ für ein $c\in\,]a,b[$.
3. Fall: $m<M$ und $m\neq f(a)$. Dann ist $f(c)=m$ für ein $c\in\,]a,b[$.
Da im 2./3. Fall M,m lokale Extrema in c sind, folgt $f'(c)=0$.

Beweis für: f in c lok. Extr. $\Rightarrow f'(c)=0$ [gilt nur, wenn c kein Randpunkt] $\boxed{\times}$

[Denn: Hat f lokales Max. (Min. entsprechend) in c,
so ex. Umgebung $U(c)$ mit: $\forall t\in U(c): f(t)\le f(c)$,
also ist
$$f_+'(c):=\lim_{t\to c+}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\le 0$$
$$f_-'(c):=\lim_{t\to c-}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\ge 0$$



Da f diff'bar, ist $f'(c)=f_+'(c)=f_-'(c)$, also $0\le f'(c)\le 0\Rightarrow f'(c)=0$.]
$\square$

Verallgemeinerter MWS oder 2.MWS: $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff'bar,
$\forall x\in\,]a,b[: g'(x)\neq 0 \Rightarrow \exists\, c\in\,]a,b[:$
$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\quad (=:\lambda).$$

[Klar: 2.MWS $\Rightarrow$ 1.MWS mit $g(x):=x$, Beweis wie 1. MWS:
nehme Hilfsfkt. $h(x):=f(x)-\lambda\cdot(g(x)-g(a))$,
um Rolle darauf anzuwenden.]

gilt mit ein- oder beidseitigen GWen

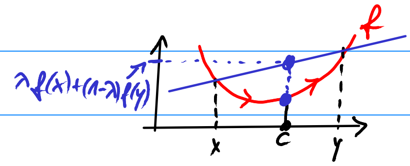
Regeln von de l'Hôpital: Seien $f,g:\,]a,b[\,\to\mathbb{R}$ [auch $a=-\infty$, $b=+\infty$ möglich]
diff'bar, $\forall x\in\,]a,b[: g'(x)\neq 0$, $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=0$.

Existiert $A=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, so gilt $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

Bsp.:
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x\log x - x + 1}{(x-1)\log x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\log x}{1-\frac{1}{x}+\log x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1/x}{1/x^2 - 1/x} = \frac{1}{2}$

$\downarrow$

Fakultativ:



Konvexe Fkt.: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konvex $:\Longleftrightarrow$

„anschaulich „f nach unten gebogen" bzw. "macht Linkskurve"

$$\forall x,y\in[a,b]\ \forall \lambda\in[0,1]:$$
$$f(\underbrace{\lambda x+(1-\lambda)y}_{=:c,\ \text{durchläuft alle Stellen } c\in[a,b]}) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

- f konkav $:\Longleftrightarrow -f$ konvex
- f konvex in $]a,b[\Rightarrow f$ stetig in $]a,b[$

Bsp.: x^2 $\swarrow$

- Sei $\underbrace{f \text{ zweimal stetig diff'bar auf } [a,b]}_{\text{d.h. } f\in\mathcal{C}^2([a,b]) :\Leftrightarrow f \text{ zweimal diff'bar \& } f'' \text{ stetig}}$. Dann: f konvex $\Longleftrightarrow f''\ge 0$ in $]a,b[$

Newtonverfahren: Schnelles numerisches Verfahren zur Nullstellenberechnung

Geg.: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff'bar und konvex, $f(a)<0<f(b)$.

Gesucht: Wert der Nst. ξ. Sei $x_0\in[a,b]$ mit $f(x_0)>0$ ein Startwert.

Satz: Dann wird durch $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ eine monoton fallende Folge definiert, die gegen ξ konvergiert.

Anwendungsbsp.: Lösung von $x=\cos x$: Sei $f:[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\cos x$, haben $f'(x)=1+\sin x$, $f''(x)=\cos x>0$ auf $]0,\frac{\pi}{2}[$. Also ist f konvex, weiter $f(0)=-1$, $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$. Sei $x_0:=\frac{\pi}{2}$, die Berechnungsvorschrift der x_n lautet $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\cos x_n}{1+\sin x_n}$, die mit TR/Computer bestimmt werden. Die x_n konvergieren gegen $0{,}739085\ldots$ (Näherungswert für x mit $x=\cos x$).