13.11.13

Repetitorium WiSe 2013/14

Lineare Algebra-Teil:

Bem. zur Darstellung einer lin. Abb. $f: V \to W$ als Matrix ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}: K^n \to K^m$:

- Die Matrix stellt die lin. Abb. dar, d.h. ${}_{\mathcal{C}}[f(v)] = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[v]$ für alle $v \in V$, d.h. multipliziert man die Matrix ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ mit dem Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$, so erhält man das Bild $f(v)$, und zwar als Koordinatenvektor bzgl. $\mathcal{C}$.
- Bei der Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ einer lin. Abb. $f: V \to W$ kommt es auf die Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ an! Auch die Reihenfolge der Basiselemente spielt eine Rolle, deswegen nimmt man für $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ (geordnete) Tupel von Basiselementen, etwa $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.
- Die Matrixdarstellungen linearer Abb. stellen diese eindeutig dar: Die Abb. $\mathrm{Hom}(V,W) \to K^{m \times n}$, $f \mapsto {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ ist für jede Basiswahl $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ein Isomorphismus.

Basiswechsel: Geg. $f: V \to W$ mit Basen $\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}$ von W $(\dim W = m)$,
und Basen $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ von V $(\dim V = n)$.

Können dann jeweils die Matrixdarstellungen ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}, {}_{\tilde{\mathcal{C}}}[f]_{\tilde{\mathcal{B}}} \in K^{m \times n}$ bilden. Wie hängen die beiden Matrizen zusammen?

Wir haben die Matrixdarstellungen ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}, {}_{\tilde{\mathcal{C}}}[f]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ beschrieben mit den Diagrammen

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\beta_{\mathcal{C}}"] \\ K^n \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}"'] & K^m \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta_{\tilde{\mathcal{B}}}"'] & W \arrow[d, "\beta_{\tilde{\mathcal{C}}}"] \\ K^n \arrow[r, "{}_{\tilde{\mathcal{C}}}f_{\tilde{\mathcal{B}}}"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ Matrix ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ $\qquad$ $\rightsquigarrow$ Matrix ${}_{\tilde{\mathcal{C}}}[f]_{\tilde{\mathcal{B}}}$

Wir legen die Diagramme übereinander und studieren als Verbindungsabb.en dazwischen die Identitätsabb.en id_V, id_W:

Die rot dargestellten Abb.en sind links ${}_{\mathcal{B}}(id_V)_{\tilde{\mathcal{B}}}$ und rechts ${}_{\tilde{\mathcal{C}}}(id_W)_{\mathcal{C}}$, denn beachten Sie die linke und rechte "Seitenfläche" des Diagrammwürfels.

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "\mathcal{B}_{\mathcal{B}}"'] & & W \arrow[dl, "\mathcal{B}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dd, "id_W"] \\
K^n \arrow[rr, "{}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}"] & & K^m \arrow[dd, "\text{rechts}"] & \\
& V \arrow[uu, "id_V"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{B}}}"'] & & W \arrow[dl, "\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{C}}}"] \\
K^n \arrow[uu, "\text{links}"] \arrow[rr, "{}_{\tilde{\mathcal{C}}}f_{\tilde{\mathcal{B}}} \Leftarrow ?"'] & & K^m &
\end{tikzcd}$$

Die zugehörigen Matrizen ${}_{\tilde{\mathcal{B}}}[id_V]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\tilde{\mathcal{C}}}[id_W]_{\mathcal{C}}$ heißen <u>Basiswechselmatrizen</u>.

Der Koordinatenvektor, der $v_i \in \mathcal{B}$ mit der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ darstellt, ist die i-te Spalte von ${}_{\tilde{\mathcal{B}}}[id_V]_{\mathcal{B}}$.

Der Basiswechsel ergibt sich nun durch die

<u>Basiswechselformel</u>: (Basiswechselsatz)

$$\boxed{{}_{\tilde{\mathcal{C}}}[f]_{\tilde{\mathcal{B}}} = {}_{\tilde{\mathcal{C}}}[id_W]_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[id_V]_{\tilde{\mathcal{B}}}}\,,$$

beachten Sie dazu die "Vorderseite" des Diagrammwürfels.

Dabei wurde verwendet, dass die Hintereinanderausführung linearer Abb.en, die durch Matrizen gegeben sind, genau deren Matrixprodukt entspricht!

- Vgl. Satz vom letzten Mal: Lin. Abb. $g: K^n \to K^m$ wird genau durch Matrix A beschrieben so, dass $g(x) = A \cdot x$ der Multiplikation von A mit x entspricht.
  Beim Hintereinanderausführen von $g(x) = A\cdot x$ und $h: K^m \to K^\ell$, $h(y) = B \cdot y$ haben wir $h(g(x)) = B \cdot g(x) = B\cdot(Ax) = (B\cdot A)\cdot x$: zu $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Komposition}}}{h\circ g}$ gehört $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Matrix-mult.}}}{B\cdot A}$.
- Das Matrixprodukt ist also auch deshalb assoziativ, weil die Hintereinanderausführung von Abb.en es ist.

s. auch Beginn von S. -4-
- Der Rang dim img ist gleich dem Rang der Matrix A, welches ja die Dimension des von den Spalten von A aufgespannten Raums ist.
- g ist bijektiv (d.h. Iso) genau wenn A invertierbar ist, g^{-1} wird dann von A^{-1} beschrieben.

Spezialfälle: • Ist $f: V \to V$ Endo, und $S := {}_{\mathcal{B}}[id_V]_{\tilde{\mathcal{B}}}$
die Basiswechselmatrix zu den Basen $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$, so ist ${}_{\tilde{\mathcal{B}}}[id]_{\mathcal{B}} = S^{-1}$
die inverse Matrix [in BWFormel $f = id_V$ einsetzen!].
Die BWFormel lautet dann ${}_{\tilde{\mathcal{B}}}[f]_{\tilde{\mathcal{B}}} = S^{-1} {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} S$ [d.h. die Darstellmatrizen sind ähnlich].
Basiswechselmatrizen von Endos sind also invertierbar.

• Ist $g: K^n \to K^m$, $g(x) = Ax$, so ist $A = {}_{\mathcal{E}'}[g]_{\mathcal{E}}$ mit den Einheitsvektorenbasen $\mathcal{E}'$ von K^m und $\mathcal{E}$ von K^n, da ${}_{\mathcal{E}'}[g(x)] = {}_{\mathcal{E}'}[g]_{\mathcal{E}} \cdot \overbrace{{}_{\mathcal{E}}[x]}^{=x}$.

• Ist $f: K^n \to K^n$ linear, so ist die Basiswechselmatrix $S := {}_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{B}}$
zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ die daraus gebildete Matrix
$S = (v_1 | \dots | v_n)$ mit den v_i als Spalten, denn $v_i = id(v_i) = {}_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{B}} \cdot \overbrace{{}_{\mathcal{B}}[v_i]}^{=e_i}$.
Sei A die Matrix, die f beschreibt, also $f(x) = A \cdot x$
Die BWFormel lautet dann ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = S^{-1} A S$.

Def.:
• Zwei Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$ heißen äquivalent, wenn es invertierbare Matrizen $S \in K^{n \times n}$, $T \in K^{m \times m}$ gibt mit $B = T^{-1} A S$.
• Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n \times n}$ gibt mit $B = S^{-1} A S$.

Folgerungen aus dem BWSatz zur Matrizentheorie:
• Durch elementare Zeilen- oder Spaltenumformungen geht eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ in eine äquivalente Matrix über.
Bew.: A ist die Abb.matrix der Lin-Abb. $f: K^n \to K^m, x \mapsto Ax$ bzgl. den Einheitsvektorenbasen. Elementare Zeilenumformungen $\rightsquigarrow$ Basiswechsel in K^m
Elementare Spaltenumformungen $\rightsquigarrow$ Basiswechsel in K^n □
• Also: Jede Matrix A ist zu ihrer Zeilenstufenform $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ äquivalent ($r = \operatorname{rg} A$), welche durch Zeilen- und Spaltenumformungen erreicht werden kann.
• Zwei Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$ sind äquivalent $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

- Für $f: V \to W$ lin. Abb. gilt $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{im} f = \operatorname{rg}\, {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$, denn das Bild der lin. Abb. $K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$ wird erzeugt von den Spaltenvektoren von A.
  Ist $r = \operatorname{rg} A$ bestimmt, folgt $\dim \ker f = n - r$ (wg. Rangsatz).
  Bestimmung von $\ker A = \{x \in K^n;\ Ax = 0\}$ durch Lösen des LGS,
  Bestimmung von $\operatorname{im} A$ geschieht durch Bildung aller Linearkombinationen der Spalten von A.
- Also: A invertierbar $\Leftrightarrow$ A ist quadratisch und $\operatorname{rg} A = n$ ($\Leftarrow$ A surj. $\overset{\text{Rangsatz}}{\Rightarrow}$ A inj., also bij., also inv'bar)
- Weiter: A invertierbar $\Leftrightarrow$ Spalten lin. unabh. $\Leftrightarrow$ Zeilen lin. unabh.
  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$,
  vgl. Determinantentheorie nächstes Mal

<u>Bsp. für Durchführung eines Basiswechsels:</u> Vom letzten Mal:

$f: K^2 \to K^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ x+y \end{pmatrix}$ hat bzgl. den Basen $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ und $\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ die Darstellung $f_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(x) = A \cdot x$ mit ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

denn $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \beta_{\mathcal{C}}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \beta_{\mathcal{C}}(f(v_2)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Jetzt Umrechnung auf die Basen $\tilde{\mathcal{B}} = \left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\tilde{v}_2}\right\}$ und $\tilde{\mathcal{C}} = \left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{w}_3}\right\}$:

Basiswechselmatrizen ${}_{\tilde{\mathcal{C}}}[\mathrm{id}_{K^3}]_{\mathcal{C}}$ und ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_{K^2}]_{\tilde{\mathcal{B}}}$:

- $\left.\begin{array}{l} \mathrm{id}_{K^2}(\tilde{v}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{id}_{K^2}(\tilde{v}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_{K^2}]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\left.\begin{array}{l} \mathrm{id}_{K^3}(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{id}_{K^3}(w_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{id}_{K^3}(w_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow {}_{\tilde{\mathcal{C}}}[\mathrm{id}_{K^3}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Jetzt:

$${}_{\tilde{\mathcal{C}}}[f]_{\tilde{\mathcal{B}}} = {}_{\tilde{\mathcal{C}}}[\mathrm{id}_{K^3}]_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_{K^2}]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Basiswechsel für bel. lin. Abb. f so möglich!