20.11.13

Repetitorium WiSe 2013/14

Lineare Algebra-Teil:

Determinantentheorie

Def.: • Determinante einer Matrix: 1. Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so ist $\det A := ad - bc \in K$.

2. Ist $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ mit $n \geq 3$, so ist $\det A \in K$ induktiv definiert durch

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det(A_{1j}), \qquad \text{[Entwicklungssatz]}$$

wobei (A_{1j}) die Matrix ist, die aus A durch Streichung der ersten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

jede andere Zeile i kann auch genommen werden, ersetze dann 1 durch Index i

• Es hat Vorteile, det einer Matrix wie folgt zu definieren:

Sei $S_n := \{\pi : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\};\ \pi \text{ bijektiv}\}$ die Menge der Permutationen von $\{1,\dots,n\}$.

Für $\pi \in S_n$ heißt jedes Paar (i,j) mit $i<j$ und $\pi(i) > \pi(j)$ ein Fehlstand von π.

Ist $F(\pi)$ die Anzahl der Fehlstände von π, so heißt $\operatorname{sgn}(\pi) := (-1)^{F(\pi)}$ das Signum von π.

π (un)gerade $:\Leftrightarrow F(\pi)$ (un-)gerade $\Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\pi) = (-)1$

Def.: $\det A := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$ Leibnizformel

Eigenschaften:

alternierend → 1. Das Vorzeichen von $\det A$ ändert sich bei Vertauschen zweier Spalten (Zeilen)

n-fach multilinear → 2. $\det A$ ändert sich nicht, wenn ein Vielfaches einer Spalte (Zeile) zu einer anderen Spalte (Zeile) addiert wird

3. Aus einer Spalte (Zeile) kann ein gemeinsamer Faktor vor die Determinante gezogen werden. Insb.: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ für alle $\lambda \in K$.

normiert → 4. $\det I_n = 1$ für die Einheitsmatrix $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

5. Die Eigenschaften 1.-3. beschreiben die Wirkung elementarer Spalten (Zeilen)-Umformungen an A auf $\det A$. Das Prinzip des Gaußschen Eliminationsverfahren läßt sich deswegen auch zur Berechnung von $\det A$ einsetzen. Eigenschaften 1.-4. sind direkte Folgerungen der Leibnizformel.

6. Die Eigenschaften 1., 2., 4. [alternierend, multilinear, normiert] dienen auch zur

- <u>Def.</u> der Determinanten als <u>die</u> (!) eindeutig bestimmte Abb. $\det: K^{n\times n}\to K$, die (n-fach) multilinear, alternierend, normiert ist. In Formeln:

$A=\underbrace{(\alpha_1|\dots|\alpha_n)}_{\text{Spalten}} \rightsquigarrow$
- $\det(\dots\lambda\alpha+\mu b\dots)=\lambda\det(\dots\alpha\dots)+\mu\det(\dots b\dots)$ in jedem Argument i (multilin.)
- $\det(\dots\alpha_i\dots\alpha_j\dots)=-\det(\dots\alpha_j\dots\alpha_i\dots)$ für je zwei Spalten α_i,α_j (alternierend)
- $\det(e_1|\dots|e_n)=1$ für die Einheitsvektoren e_i (normiert)

7. Definieren allgemeiner eine <u>Determinantenfunktion</u> $\det_{(\mathcal{B})}$ auf V^n, V ein K-VR mit Basis $\mathcal{B}$, als <u>die</u> eind. best. Abb. $\det: V^n\to K$, die multilinear, alternierend und <u>normiert</u> ist.
d.h. die auf $\mathcal{B}$ den Wert 1 hat

<u>Weitere Folgerungen für det aus der Leibnizformel:</u>

1. $\det A=0 \Leftrightarrow$ Spalten (Zeilen) von A sind linear abhängig
$\Leftrightarrow$ A nicht invertierbar (vgl. letztes Mal)

⌜Überprüfen $\det A=0$ im Spezialfall: $A=(\alpha_1|\dots|\alpha_n)$ mit zwei gleichen Spalten $\alpha_i=\alpha_j$, der allgemeine Fall ist darauf zurückführbar.
In $\det A$ tritt mit jedem Summanden $\operatorname{sgn}(\pi)\, a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(i),i}\cdots a_{\pi(j),j}\cdots a_{\pi(n),n}$
auch der Summand $\underbrace{\operatorname{sgn}(\pi\circ\tau_{ij})}_{=-\operatorname{sgn}(\pi)}\, a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(j),j}\cdots a_{\pi(i),i}\cdots a_{\pi(n),n}$ auf, also folgt $\det A=0$.⌟

2. $\det A=\det A^T$, [Es folgt $\det A=\sum_{\pi\in S_n}\operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1,\pi(1)}\cdots a_{n,\pi(n)}$]
deswegen können in obigen Sätzen "Spalte(n)" durch "Zeile(n)" ersetzt werden

3. Bem.: Das charakteristische Polynom (s. später) $\chi_f(X)=\det(X\cdot \mathrm{id}_V-f)=\det(X\cdot I_n-A)$ ist ein Polynom in X aufgrund der Def. von det mit der Leibnizformel

4. $\det(AB)=\det A\cdot\det B$ für je zwei $A,B\in K^n$, ("Multiplikationssatz für det")
denn: Ist $A=\underbrace{(\alpha_1|\dots|\alpha_n)}_{\text{Spalten}}$ und $B=(b_{ij})$,

dann ist $A\cdot B=(b_{11}\cdot\alpha_1+\dots+b_{n1}\cdot\alpha_n|\dots|b_{1n}\cdot\alpha_1+\dots+b_{nn}\cdot\alpha_n)$,

es folgt

$$\det(A\cdot B)\overset{\text{Multilin.}}{=}\sum_{i_1=1}^{n} b_{i_1,1}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} b_{i_n,n}\,\overbrace{\det(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_n})}^{=0,\text{ wenn ein } i_j=i_k \text{ ist, vgl. 1.}}$$

$$=\sum_{\pi\in S_n} b_{\pi(1),1}\cdots b_{\pi(n),n}\det(\alpha_{\pi(1)},\dots,\alpha_{\pi(n)})$$

$$\overset{\text{alternierend}}{=}\sum_{\pi\in S_n}\operatorname{sgn}(\pi)\cdot b_{\pi(1),1}\cdots b_{\pi(n),n}\det(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\det B\cdot\det A.\ \square$$

Folgerungen aus dem Multiplikationssatz:

1. Kästchenmultiplikationssatz: Ist $A = \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline C & D \end{array}\right)$ (O: Nullmatrix) mit Matrizen $B \in K^{m\times m}$, $C \in K^{(n-m)\times m}$, $D \in K^{(n-m)\times(n-m)}$, so gilt $\det A = \det B \cdot \det D$.
   Denn $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & I_{n-m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \rightsquigarrow$ det anwenden
   Der Satz gilt ebenso für $A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$.
2. Ist $A \in K^{n\times n}$ invertierbar, folgt $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$, da $A^{-1} A = I_n$ $\Rightarrow \det A^{-1} \cdot \det A = 1$
3. Ähnliche Matrizen A, B (d.h. $\exists$ inv'bares S mit $A = S^{-1} B S$), haben dieselbe Determinante (da $\det A = (\det S)^{-1} (\det B)(\det S) = \det B$).
4. Ist $f: V \to V$ ein Endo, haben alle Abb.matrizen ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ zu verschiedenen Basen $\mathcal{B}$ also dieselbe Determinante nach 3., weil diese Matrizen alle ähnlich sind (vgl. letztes Mal).

Def.: Daher definiere $\det f := \det {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ für irgendeine Basis $\mathcal{B}$ von f, ist also wohldefiniert. [Unterscheide det eines Endos von der Def. in 7., S.-2-!]

5. Für Endo $f: V \to V$ gilt: $\det f \neq 0 \Leftrightarrow f$ Isomorphismus,
   denn $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ Mult. mit A ist Iso, vgl. 1. auf S.-2-
6. Für lin. Abb. $f: V \to W$, selbst wenn $\dim V = \dim W$ ist, kann kein $\det f$ definiert werden: Werden Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ in V, W gewählt, kann zwar $\det {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ berechnet werden, bei Basiswechsel zu anderen Basen erhalten wir aber eine dazu äquivalente Matrix $T^{-1}\, {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}\, S$, wobei $\det T \neq \det S$ zu erwarten ist. Diese hat also i.A. eine andere Determinante als ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$.
7. Der Begriff "Spur" taucht in der Stichwortliste der Lehrinhalte laut PO auf, aber nicht in der Zusammenfassung. Deshalb nur kurz:
   $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (Summe der Diagonalelemente),
   haben: $\mathrm{Spur}: K^{n\times n} \to K$ [vgl. det],
   diese Abb. ist linear: $\mathrm{Spur}(A+B) = \mathrm{Spur}\,A + \mathrm{Spur}\,B$, $\mathrm{Spur}\, cA = c\,\mathrm{Spur}\,A$
   Es gilt: Ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur.
   Die Spur ist also – wie die Determinante – invariant unter Basiswechsel, vgl. 4. [Gilt nur für quadratische Matrizen / Endos]

Determinantentheorie und Lösungen eines LGS

Geg.: LGS $Ax = b$ mit $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$, Gesucht: Lösungen $x \in K^n$.
[n = Anzahl Unbekannter, m = Anzahl Gleichungen]

Ein LGS kann etwa aus der Fragestellung entstehen, ein $v \in V$ anzugeben mit $f(v) = w$ für eine lin. Abb. $f: V \to W$, $w \in W$ fest.
Die Darstellung des Problems mit Matrizen (nach Basiswahl) spielt es zurück auf ein LGS mit Matrizen: $\underbrace{{}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}}_{A} \cdot \underbrace{{}_{\mathcal{B}}[v]}_{x} = \underbrace{{}_{\mathcal{C}}[w]}_{b}$, ideal: $\mathcal{B}, \mathcal{C}$: Einheitsvektorenbasis

- Ist $b = 0$, so heißt das LGS $Ax = 0$ homogen. Die Lösungsmenge ist $\ker A$ und ein UVR von K^n. Die Dimension ist $n - \operatorname{rg} A$ (Rangsatz).
  $\rightsquigarrow$ Ein LGS über $K = \mathbb{R}$ kann nicht endlich viele Lösungen haben!

  Es ist nichttrivial lösbar, wenn dies > 0 ist, d.h. falls $\operatorname{rg} A < n$ ist.
  Für $\operatorname{rg} A = n$ hat es genau die Lösung $x = 0$.

- Ist $b \neq 0$, so heißt das LGS $Ax = b$ inhomogen.
  Es ist lösbar, wenn $b \in \operatorname{im} A$ ist.
  - Für $\operatorname{rg} A = n$ ist es eindeutig lösbar, Bestimmung mit Gaußelim. möglich.
    Falls $n = m$, gilt: LGS universell lösbar $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow A$ inv'bar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$,
    die Lösung ist dann $x = A^{-1} b$.
  - Für $\operatorname{rg} A = m$ ist es universell lösbar, d.h. $\operatorname{im} A = K^m \Leftrightarrow Ax = b$ lösbar für jedes $b \in K^m$
  - Für $\operatorname{rg} A < n$ ist die Lösungsmenge ein affiner UR:
    $$\mathbb{L} = x_0 + \ker A = \{x_0 + x \mid Ax = 0\},$$
    wobei x_0 irgendeine ("spezielle") Lösung des LGS ist, die z.B. mit Gaußelim. bestimmbar ist.

    Dann ist $\dim \mathbb{L} = \dim \ker A = n - \operatorname{rg} A$ laut Rangsatz.

- Lösen eines LGS mit Determinantentheorie im Fall $n=m$:

Cramersche Regel: Ist $\det A \neq 0$, so ist die Lösung x von $Ax=b$ geg. durch

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_i = \frac{1}{\det A}\cdot \det(a_1|\ldots|a_{i-1}|b|a_{i+1}|\ldots|a_n)$$

↑ ersetze Spalte i von A durch b

Berechnen der Lösung damit ungeeignet,
weil Determinantenberechnung zu aufwendig. Lieber Gaußelim. in der Praxis nehmen!

Beweis der Cramerschen Regel: Ist $x_i \in K$ die i-te Komponente der Lösung, gilt

$$x_i \cdot \det A \underset{\uparrow}{=} \det(a_1|\ldots|a_{i-1}|x_i a_i|a_{i+1}|\ldots|a_n)$$

Linearität in i-ter Komponente

$$\underset{\uparrow}{=} \det(a_1|\ldots|a_{i-1}|\underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j a_j}_{=Ax=b}|a_{i+1}|\ldots|a_n).$$

Folgerung 1. auf S. -2-

$\square$