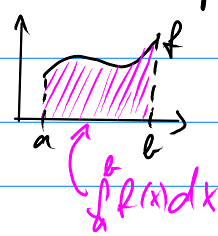
27.11.13

Repetitorium WiSe 2013/14

Analysis-Teil:

Das Riemann-Integral

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkte Fkt. Wir möchten $\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ einführen. Für $\operatorname{im} f \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ soll diese reelle Zahl geometrisch als der Flächeninhalt der Fläche interpretiert werden, die zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt.

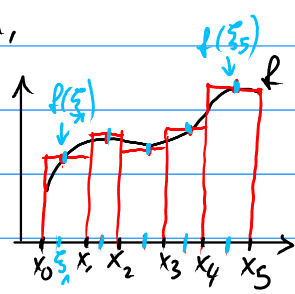


Für die konstante Fkt. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$ muß also $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a)$ sein.

Idee für allg. f: Nähere die Fläche an durch immer feinere Treppenfunktionen, für die das $\int_a^b f(x)dx$ leicht zu berechnen ist. Nimm als $\int_a^b f(x)dx$ dann den Grenzwert dieser Treppenfunktionsflächeninhalte, wenn die maximale Treppenbreite gegen 0 geht, sofern dieser Grenzwert existiert. Dann nennen wir f Riemann-integrierbar, wenn das klappt, und schreiben $\int_a^b f(x)dx$ für diesen GW.

Formal:

- Sei $Z=(x_0,\dots,x_m)$ eine Zerlegung (auch: Unterteilung) von $[a,b]$, d.h. $a=x_0<x_1<\dots<x_m=b$, die größte Länge ihrer Teilintervalle $[x_{k-1},x_k]$ heißt Feinheit, schreiben dafür $|Z|:=\max\{|x_k-x_{k-1}|;\ k=1,\dots,m\}$.
- Ist $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_m)\in\mathbb{R}^m$ mit $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\dots,m$, so heißt
$$\sigma(Z,\xi):=\sum_{k=1}^m f(\xi_k)\cdot(x_k-x_{k-1})$$
die Zerlegungssumme bezüglich Z und ξ.
(Flächeninhalt der entsprechenden Treppenfunktion)



inf/sup ex., da f beschr.

- Jetzt: Ist $m_k=\inf f([x_{k-1},x_k])$ und $M_k=\sup f([x_{k-1},x_k])$, $1\leq k\leq m$, so heißt $\underbrace{\sigma(Z,(m_1,\dots,m_k))}_{=:\underline{s}(Z)}$ auch Untersumme, $\underbrace{\sigma(Z,(M_1,\dots,M_k))}_{=:\overline{s}(Z)}$ Obersumme von f bzgl. Z.
- Sei $\mathcal{Z}$ die Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$. Dann heißt $\sup_{Z\in\mathcal{Z}} \underline{s}(Z)$ unteres (Riemann-)Integral, $\inf_{Z\in\mathcal{Z}} \overline{s}(Z)$ oberes (Riemann-)Integral.

Jetzt die eigentliche

Def.: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Stimmen oberes und unteres (R-) Integral überein, d.h. $\sup_{Z\in\mathcal{Z}} \underline{s}(Z) = \inf_{Z\in\mathcal{Z}} \overline{s}(Z)$, dann heißt f (Riemann-) integrierbar.

Wir setzen dann $\int_a^b f(x)\,dx := \sup_{Z\in\mathcal{Z}} \underline{s}(Z) = \inf_{Z\in\mathcal{Z}} \overline{s}(Z)$.

Es gilt: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ int'bar $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|Z|\to 0} \sigma(Z,\xi)$ ↑ bel. Zwischenstellenvektor

Dies dient zur expliziten Berechnung von Integralen, man kann sich auf geeignete spezielle Zwischenstellen beschränken, z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx$

Bsp.: $f(x)=x^2 \Rightarrow \int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n}{6}\cdot(n+1)(2n+1) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$

Kriterien für Integrierbarkeit: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt.

(1) f int'bar $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists Z\in\mathcal{Z}:\ \overline{s}(Z)-\underline{s}(Z)<\varepsilon$.

⌈ „⇒": Für $\varepsilon>0$ ex. $Z_0\in\mathcal{Z}: |\sup \underline{s}(Z)-\underline{s}(Z_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ und $|\underbrace{\inf \overline{s}(Z)}_{=\sup\underline{s}(Z)\text{ nach Vor.}}-\overline{s}(Z_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \overset{\Delta\text{-Unglg.}}{\Rightarrow} \checkmark$,

„⇐": $\forall\varepsilon>0\ \exists Z_\varepsilon\in\mathcal{Z}: \overline{s}(Z_\varepsilon)-\underline{s}(Z_\varepsilon)<\varepsilon$

$\Rightarrow \underline{s}(Z_\varepsilon)\le \sup\underline{s}(Z)\le\inf\overline{s}(Z)\le\overline{s}(Z_\varepsilon)<\underline{s}(Z_\varepsilon)+\underline{\underline{\varepsilon}} \Rightarrow \sup\underline{s}(Z)=\inf\overline{s}(Z).$ ⌋

(2) f stetig $\Rightarrow f$ int'bar (auf $[a,b]$)

⌈ f stetig auf kp. IV $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig,

d.h. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $x,y\in[a,b]$ mit $|x-y|<\delta$.

Wähle $Z=(x_0,\dots,x_n)$ mit $|Z|<\delta$.

Es folgt $M_k-m_k\le\frac{\varepsilon}{b-a}$, also: [mal (x_k-x_{k-1}) nehmen und $\sum_{k=1}^{n}$ drüber]

$\overline{s}(Z)-\underline{s}(Z)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\cdot(x_k-x_{k-1})\le\frac{\varepsilon}{b-a}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})}_{=b-a,\text{ da Teleskop}\Sigma}=\varepsilon.$

Also ist f int'bar nach (1). ⌋

Für diesen Satz wird die "gleichmäßige Stetigkeit" benutzt, vgl. Rep-Termin 4 S. -4-

Verallgemeinerung von (2): f auf $[a,b]$ beschr. und stetig bis auf endlich viele Unstetigkeitspunkte $\Rightarrow f$ integrierbar auf $[a,b]$

(3) Jede auf $[a,b]$ monotone Fkt. f ist integrierbar.

⌈ OE f mon. w. und $[a,b]=[0,1]$. Wähle Zerlegung $Z_n=(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1)$.
Dann: $M_k=f(x_k)$ und $m_k=f(x_{k-1})$, also ist
$$\overline{S}(Z_n)-\underline{S}(Z_n)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\underbrace{(x_k-x_{k-1})}_{=\frac{1}{n}}\le\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))}_{=f(b)-f(a),\text{ da Teleskop}\Sigma}\cdot\frac{1}{n}<\varepsilon,$$
für n hinreichend groß $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ f int'bar. ⌋

(4) Bsp. nicht int'bare Fkt. $f:[0,1]\to\mathbb{R}:\ f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

Eigenschaften des Integrals (Vor.: Integrierbarkeit auf $[a,b]$)

- $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^a f(x)\,dx=0$
- ⊛ → f auf $[a,b]$ int'bar $\Rightarrow$ f int'bar auf jedem $[c,d]\subseteq[a,b]$
- $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$ • $\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$ für $\lambda\in\mathbb{R}$
- f,g int'bar $\Rightarrow$ $f\cdot g$ int'bar und auch $\frac{f}{g}$ int'bar falls $\inf g([a,b])>0$.
- Monotonie des $\int$: $f(x)\le g(x)$ auf $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$
- f,g int'bar $\Rightarrow$ $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, $|f|$ int'bar und $\underbrace{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx}_{\text{"Standardabschätzung"}}$

auch "erweiterter MWS"
1. Mittelwertsatz der $\int$-Rechnung:
Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ int'bar, es gelte dort $m\le f(x)\le M$ für $m,M\in\mathbb{R}$.
Weiter $g:[a,b]\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ int'bar.
Dann ex. $\mu\in\mathbb{R}$ mit $m\le\mu\le M$ und $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\mu\int_a^b g(x)\,dx$.
Kor.: Ist f darüberhinaus stetig, so ex. $\xi\in[a,b]$ mit $\mu=f(\xi)$ [ZWS],
also $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,dx$.

⌈ Wegen Monotonie des $\int$ folgt aus $m\le f(x)\le M$, also $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$,
dass $\int_a^b m\,g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le\int_a^b M g(x)\,dx$, d.h. die Beh. ⌋

Stammfunktionen und der Hauptsatz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ int'bar.

Def.: $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion (oder unbestimmtes $\int$) von f, falls $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.
("Umkehrung der Ableitung")

- Ist F eine SF von f, so auch jede Fkt. $F_a(x) := F(x) + a$, $F_a: I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, denn $F_a'(x) = F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$. Es gibt i. A. ∞ viele SFen.
- ⊕ Je zwei SFen F, G von f unterscheiden sich nur durch eine Konstante, denn $F' = f = G' \Rightarrow (F-G)'(x) = 0$ für alle $x \in I \Rightarrow F - G$ konstant (vgl. Rep-T. 5)

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: (Zusammenhg. $\int \leftrightarrow$ SF)
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:
(1) f besitzt die Stammfunktion $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ auf $[a,b]$.
(2) Für jede Stammfunktion F gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$ [direkt aus (1) und ⊕]

[Bem.: Vgl. die "Hauptsatzkantate" von F. Wille, 4-stimmige Vertonung von Teil (1):
"Es sei f stetige Funktion auf einem Intervall,
dann existiert von a bis x dazu das Integral.
Fasst x man als variabel auf, erhält man hohen Lohn,
dies ist (von f) die allerschönste Stammfunktion."]

Bew.: Da f auf $[a,x]$ stetig, ist $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ definiert wegen ⊛.
z.z.: $F'(x) = x$ auf $[a,b]$. Sei $x \in [a,b]$, da f in x stetig ist, folgt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ mit $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ falls $|y - x| < \delta$.
Für $|h| < \delta$ ist

$$\Big|\underbrace{\tfrac{1}{h}\big(F(x+h) - F(x)\big)}_{\xrightarrow{h \to 0} F'(x)} - f(x)\Big| = \Big|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)\Big|$$

$$= \Big|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,dx\Big| \underset{\text{Standardabschätzung}}{\leq} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon\,dt = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ bel. klein, folgt $F'(x) = f(x)$. $\square$

Bem.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$ int'bar auf $[-1,1]$, Flächenfkt. $F(x) := |x| + c$,
Aber: f hat keine SF!

Partielle Integration: $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

[u, v auf $[a,b]$ st. diff'bar] [Bew.: Differentieren + Hauptsatz + Produktregel]

Bsp.: $\int_a^b 1\cdot \log x\,dx = x\log x\Big|_a^b - \int_a^b x\cdot\frac{1}{x}\,dx = b\log b - a\log a - b + a.$

Substitutionsregel: $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $g: [u,v]\to\mathbb{R}$ st. diff'bar mit $g([u,v])\subseteq[a,b]$, $g(u)=a$, $g(v)=b$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_u^v f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

[Bew.: Differentieren + Hauptsatz + Kettenregel]

Bsp.: $g(t) := \log t$, $f(x) := x$, $g(e)=1$, $g(e^2)=2$

$$\Rightarrow \int_e^{e^2} \frac{\log t}{t}\,dt = \int_e^{e^2} \underbrace{(\log t)}_{g(t)}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{t}}_{g'(t)}\,dt = \int_1^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}t^2\Big|_1^2 = \tfrac{1}{2}(4-1) = \tfrac{3}{2}$$

- Ableitung von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) := \int_{\sin 0}^{\sin x} e^t\,dt = \int_0^x e^{\sin t}\cdot\cos t\,dt$ ist $f'(x) = e^{\sin x}\cdot\cos x$

Uneigentliche Integrale (=Grenzwerte "normaler" Integrale)

A. Unbeschr. Integrationsbereich: **Def.:** Sei $f: [a,\infty[\to\mathbb{R}$ int'bar auf jedem $[a,t]$. Dann ist $\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ das uneigentliche $\int$ über f auf $[a,\infty[$, falls existent.

[Analog: $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$] Existenz $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists s_0>a\ \forall t\ \forall s>s_0: \left|\int_s^t f(x)\,dx\right| < \varepsilon$

- Reihenvergleichskriterium für $\int_1^\infty f(x)\,dx$: Sei $f: [1,\infty[\to\mathbb{R}_{>0}$ mon. fallend. Dann: $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ kgt. $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx$ kgt.

[Bsp.: $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ für $\alpha>1$, $\alpha\leq 1$]

B. Unbeschr. Integrand: **Def.:** Sei $f:]a,b]\to\mathbb{R}$ int'bar auf jedem $[a+\varepsilon,b]$ ($\varepsilon>0$ bel. klein). Dann ist $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ das uneigentliche $\int$ über f auf $[a,b]$, falls existent.

[Analog: $[a,b[$, $]a,b[$. Für $c\in[a,b]$, f auf c nicht def.: $\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, falls ex.]