4.12.13

Repetitorium WiSe 2013/14

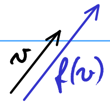
Lineare Algebra Teil:

Eigenwerttheorie, Diagonalisierbarkeit

Vergessen Sie nicht „$v \neq 0$"!

Def. (EW/EV): Sei V ein K-VR, $f: V \to V$ Endo.
Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt Eigenwert (EW) von f,
falls ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, existiert mit $f(v) = \lambda v$.
Der Vektor v heißt Eigenvektor (EV) von v zum EW λ.

Anschaulich: v ist ein Vektor, den f "in dieselbe Richtung" abbildet:
das Bild $f(v)$ ist das λ-fache von v.



Bem.: Ist $f: V \to W \neq V$ linear, kein Endo, macht $f(v) = \lambda v$ kein Sinn, da $\lambda v \notin W$.

Def.: Die Menge $E_\lambda := \{ v \in V \mid \overbrace{f(v) = \lambda v}^{\Leftrightarrow f(v) - \lambda v = 0} \} = \ker(f - \lambda \mathrm{id}_V)$
(ist Unterraum von V!) heißt Eigenraum von f.
Die Menge aller Eigenwerte von f heißt Spektrum von f.

- Da für eine quadr. Matrix $A \in K^{n \times n}$ ein Endo $K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ festgelegt wird, kann man ebenso von Eigenvektor usw. einer Matrix A sprechen.
- Ähnliche Matrizen haben dieselben EWe: $A = S^{-1}BS$, $Bv = \lambda v \Rightarrow S^{-1}Av = S^{-1}Bv = S^{-1}(\lambda v)$ $\overset{Av = \lambda v}{\Uparrow}$
- Anschaulich: jeder Eigenraum wird mit f in sich abgebildet: $f(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$ (d.h. E_λ ist f-invariant)

⊛ **Satz:** V ein K-VR, $f: V \to V$ Endo, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ p.w.v. EWe von f mit EVen $v_1, \dots, v_k$.
Dann sind $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig.

Bew.: VI nach k, $k=1$: Def. EV, $k \to k+1$: $c_1 v_1 + \dots + c_{k+1} v_{k+1} = 0 \overset{f \text{ anw.}}{\Rightarrow} 0 = \sum_{i=1}^{k+1} c_i \lambda_i v_i$,
andererseits $0 = \lambda_1 0 = \underbrace{\lambda_1 c_1 v_1}_{} + \lambda_1 c_2 v_2 + \dots + \lambda_1 c_{k+1} v_{k+1} = 0$

$$\Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) c_2 x_2 + \dots + (\lambda_{k+1} - \lambda_1) c_{k+1} v_{k+1} = 0$$

$$\overset{\text{Ind.vor.}}{\Rightarrow} (\lambda_2 - \lambda_1) c_2 = \dots = (\lambda_{k+1} - \lambda_1) c_{k+1} = 0 \Rightarrow c_2 = \dots = c_{k+1} = 0, \ \underbrace{c_1 v_1 = 0}_{\Rightarrow c_1 = 0.} \quad \square$$

Kor.: Jeder Endo eines n-dim. K-VRs V hat $\leq n$ viele EWe.
Jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ hat $\leq n$ viele EWe.

Bestimmung von EW/EU: Sei V ein K-VR, $\dim_K V = n$, $f: V \to V$ Endo.
Sei $A := {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ und betr. Koordinatenvektor $\beta_{\mathcal{B}}(v) \in K^n$ bzgl. Basis $\mathcal{B}$.
Dann ist die Untersuchung von $f(v) = \lambda v$ gleichwertig mit $A \cdot w = \lambda w$
mit $w = \beta_{\mathcal{B}}(v)$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "\beta_{\mathcal{B}}"] \\ K^n \arrow[r, "A"'] & K^n \end{tikzcd}$$

Es genügt also, EW/EU von Matrizen zu untersuchen!

Standardfrage: Wie berechnet man EWe [mit dem charakteristischen Polynom] ?

Haben: λ EW von $A \in K^{n \times n}$

$\Leftrightarrow$ es ex. $v \in K^{n \times n}$, $v \neq 0$: $Av = \lambda v$

$\Leftrightarrow$ " , " : $(A - \lambda I_n) v = 0$

$\Leftrightarrow$ das homogenes LGS $(A - \lambda I_n) v = 0$ ist (in v) nichttrivial lösbar

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n \Leftrightarrow \underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{} = 0$ | $[\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0]$

| $I_n = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

I_n = n-te Einheitsmatrix

Nach Def. der Determinante haben wir für $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$:

$$\det(A - X \cdot I_n) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot (a_{\pi(1),1} - X \cdot \delta_{\pi(1),1}) \cdots \underbrace{(a_{\pi(n),n} - X \cdot \delta_{\pi(n),n})}_{},$$

dies ist ein Polynom $\in K[X]$. Seine Nullstellen sind genau die EWe von A.

Def.: Das Polynom $\chi_A(X) := \det(A - X \cdot I_n)$ heißt charakteristisches Polynom von A.

Der Eigenraum $E_\lambda = \ker(A - \lambda \cdot I_n)$ ist der Lösungsraum des homogenen LGS $(A - \lambda \cdot I_n) \cdot v = 0$.

Satz: Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.

Bew.: $A = S^{-1} B S \Rightarrow \det(A - X I_n) = \det(S^{-1} B S - \underbrace{X \cdot I_n}_{= S^{-1} \cdot X I_n \cdot S}) = \det(S^{-1}) \det(B - X I_n) \det S = \det(B - X I_n)$.

$\square$

$\rightsquigarrow$ Somit haben Endos auch ein (eind. best.) charakteristisches Polynom $\chi_f \in K[X]$.

Bem.: "ähnlich" = "Konjugiert" (Gruppenel. der Form $h^{-1} g h$, $h \in G$, heißt Konjugiert zu $g \in G$).

Die EWtheorie ist nützlich bei folgender <u>Problemstellung</u>: Sei V ein K-VR, $\dim_K V = n$. Geg. ein Endo $f: V \to V$. Gibt es eine Basis $\mathcal{B}$, bezüglich der die darstellende Matrix $\tilde{A} = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ möglichst einfache Gestalt hat?

M.a.W. gibt es zu irgendeiner darstellenden Matrix A eine dazu ähnliche Matrix $\tilde{A}$, so daß $\tilde{A}$ möglichst einfache Gestalt hat?

Untersucht werden zuerst die Endos, für die eine solche einfache Gestalt existiert:

<u>Def.</u>: $A \in K^{n \times n}$ heißt <u>diagonalisierbar</u>, wenn sie zu einer Diagonalmatrix $\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \lambda_n \end{bmatrix}}$ ähnlich ist. Endo $f: V \to V$ heißt <u>diagonalisierbar</u>, wenn f eine Abb.matrix besitzt, die diag'bar ist.

<u>Bem.</u>:
- Alle Abb.matrizen ähnlich $\Rightarrow$ im Fall der Diag'barkeit alle <u>zurselben</u> Diag'matrix ähnlich
- Die λ_i sind die EWe von A, da $Ae_i = \lambda_i e_i$ gilt.

→ <u>Satz</u> (äquivalente Bed. für Diag'barkeit): Sei V ein K-VR, $\dim_K V = n$, $f: V \to V$ Endo. Äquivalent sind: (i) f diag'bar, (ii) in V ex. <u>Basis aus EVen</u> von f,
(iii) V ist direkte Summe der Eigenräume von f,
(iv) die Summe der Dimensionen der Eigenräume von f ist gleich n.

<u>Bew.</u>: <u>(i) ⇒ (ii)</u>: hat f bzgl. $\mathcal{B}$ die Diag'gestalt $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix} = A$, d.h. $Ae_i = \lambda_i e_i$, gilt $f(v_i) = \lambda v_i$ für die Basisel. v_i von $\mathcal{B}$ (da ja $\rho_{\mathcal{B}}(v_i) = e_i$ gilt).

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>: seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die versch. EWe von f. Nach Satz ⊛ ist die Summe der E_{λ_i} direkt, d.h. $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k} \subseteq V$. Für „$\supseteq$" sei $v \in V$ bel., bzgl. der Basis $(v_1, \dots, v_n)$ aus EVen ist $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$. Fassen wir alle EVen zum gleichen EW c_i zusammen, erhalten wir $v = \tilde{v}_1 + \dots + \tilde{v}_k$, die $\tilde{v}_i \in E_{\lambda_i}$.

<u>(iii) ⇒ (iv)</u>: ✓, <u>(iv) ⇒ (i)</u>: Seien $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ die Eigenräume von f, $\dim E_{\lambda_i} = m_i$. Wählen in jedem E_{λ_i} Basis $\mathcal{B}_i$, setze $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$, ist lin. unabh. nach Satz ⊛. Wegen $m_1 + \dots + m_k = n$ ist $\mathcal{B}$ sogar Basis von V, bzgl. der f Diag'gestalt hat. ☐

[Satz gilt analog für K^n statt V und Matrix $A \in K^{n \times n}$ statt f.]

hinreichend für Diag'barkeit, nicht notw.!

<u>Kor.</u>: V ein K-VR, $\dim V = n$.
Dann: Ein Endo f [quadr. Matrix $A \in K^{n \times n}$] mit n <u>verschiedenen</u> EWen ist diag'bar.

Bem.: Bsp. für $\not\Leftarrow$: $f = \mathrm{id}_V$ diag'bar, einziger EW ist $= 1$

Kriterium für Diag'barkeit mit charakteristischem Polynom:

Satz: V ein K-VR, $\dim_K V = n$, $f: V \to V$ Endo. Dann:

f diag'bar $\Leftrightarrow$ χ_f hat die Form $\chi_f = (-1)^n (X-\lambda_1)^{r_1} \cdots (X-\lambda_k)^{r_k}$ $\boxed{*}$

mit $r_i \in \mathbb{N}$, p.w.v. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$,

$\to$ // und wenn für $i = 1, \ldots, k$ gilt: $\dim_K \operatorname{im}(f - \lambda_i \, id_V) = n - r_i$.

Bem.: • hat χ_f die Form $\boxed{*}$, zerfällt χ_f in Linearfaktoren, r_i ist die Vielfachheit der Nullstelle λ_i • Die λ_i sind gerade die (p.w.v.) EWe von f.

wg. Rangsatz ↝ • die zweite Forderung besagt $\underline{\dim_K E_{\lambda_i} = r_i}$ für $i = 1, \ldots, k$, da $E_{\lambda_i} = \underline{\ker}(f - \lambda_i \, id_V)$.

• entsprechendes gilt für $A \in K^{n \times n}$, ersetze $\dim \operatorname{im}(f - \lambda_i \, id_V)$ durch $\operatorname{rg}(A - \lambda_i I_n)$.

• hinreichend für Diag'barkeit: χ_f zerfällt in lauter verschiedene Linfaktoren (dann alle $r_i = 1$)

Def.: geometrische Vielfachheit eines EWs λ_i ist $\dim E_{\lambda_i}$, die Dimension des Eigenraums

algebraische Vielfachheit eines EWs λ_i ist r_i, der Exponent von $(X - \lambda_i)$ in $\boxed{*}$

{ • Somit: Sind geometrische und algebraische Vielfachheiten gleich (für jeden EW), so ist f diag'bar (und umgekehrt).

Bew.: "$\Rightarrow$": f diag'bar $\Rightarrow$ hat Abb.matrix $A_f = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{r_1} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overbrace{\lambda_k \cdots \lambda_k}^{r_k} \end{pmatrix}$ mit p.w.v. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Dann: $\det(A_f - X I_n) = (\lambda_1 - X)^{r_1} \cdots (\lambda_k - X)^{r_k} = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k}$

und $\dim \operatorname{im}(f - \lambda_i \, id_V) = \operatorname{rg}(A_f - \lambda_i I_n) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k - \lambda_i \end{pmatrix} = n - r_i$.

"$\Leftarrow$": $\boxed{*} \Rightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ EWe von f, da $\dim \operatorname{im}(f - \lambda_i \, id_V) = n - r_i$ ist $\dim \overbrace{E_i}^{\ker(f - \lambda_i \, id_V)} = r_i$,

also $\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_k} = r_1 + \ldots + r_k = n$. Wegen Satz auf S.-3-(iv) ist f diag'bar. $\square$

Bsp.: (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ über $K = \mathbb{R}$ nicht diag'bar: char. Polynom ist $\chi_A = X^2 + 1$, ohne Nst. über $\mathbb{R}$.

über $K = \mathbb{C}$: $\chi_A = (X - i)(X - (-i))$, hat 2 versch. EWe ↝ diag'bar zu $\tilde{A} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = S^{-1} A S$

mit $S = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ i & -i \end{array}\right)$, wobei die Spalten die EVen von A sind (zum EW $i, -i$)

↝ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto A \cdot x$ hat keine EWe über $\mathbb{R}$, ist geometrisch eine Drehung um -90°

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\chi_A = (X-1)^2$, aber $\operatorname{rg}(A - 1 \cdot I_n) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq n - \underset{\substack{\uparrow \\ r \text{ für } \lambda = 1}}{2} = 0$

$\to$ alg. & geom. Vielfachheit versch.! $\Rightarrow$ A nicht diag'bar wegen Satz

(3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Endo hat immer EWe, da $\chi_f \in \mathbb{R}[X]$ den Grad 3 hat:

Polynome vom Grad 3 haben immer Nullstelle über $\mathbb{R}$ [analytische Begründung: ZWS, algebraische Begründung: über $\mathbb{R}$ zerfallen Polynome in Produkt von Polynomen vom Grad ≤ 2]

Zum Satz von Cayley-Hamilton

Vor.: V K-VR, $\dim_K V = n$, $f: V \to V$ Endo.

Gesehen: $f: V \to V$ diag'bar $\Rightarrow V = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k} = \ker(f-\lambda_1 id_V) \oplus \ldots \oplus \ker(f-\lambda_k id_V)$

Sei f diag'bar.

Betr. dann den Endo $g := (f-\lambda_1 id_V) \circ \ldots \circ (f-\lambda_k id_V) : V \to V$,

d.h. ist $M_f(X) := (X-\lambda_1) \cdots (X-\lambda_k) \in K[X]$,

setze f dort ein, d.h. $g := M_f(f)$.

Wegen $(f-\lambda_i id_V) \circ (f-\lambda_j id_V) = f^2 - (\lambda_i + \lambda_j) f + \lambda_i \lambda_j id_V = (f-\lambda_j id_V) \circ (f - \lambda_i id_V)$

gilt mit $v = v_1 + \ldots + v_k$, die $v_i \in E_{\lambda_i}$,

$$\text{dass } g(v) = \underbrace{(f-\lambda_1 id_V) \circ \ldots \circ (f-\lambda_k id_V)(v_1)}_{=0, \text{ da } (f-\lambda_1 id_V)(v_1)=0} + \ldots + \underbrace{(f-\lambda_1 id_V) \circ \ldots \circ (f-\lambda_k id_V)(v_k)}_{\text{analog } =0} = 0,$$

d.h. $g = 0$.

Im Fall, dass f diag'bar ist, folgt also $M_f(f) = 0$. Da $M_f \mid \chi_f$ in $K[X]$, folgt $\underline{\underline{\chi_f(f) = 0}}$.

Dies gilt immer:

Satz von Cayley-Hamilton: Sei V ein V-VR, $\dim_K V = n$, $f: V \to V$ Endo, χ_f das charakteristische Polynom von f. Dann ist $\chi_f(f) = 0$.

Bem.: • Die Null ist hier die Nullabb., ein "Beweis" der Form $\chi_f(f) = \det(f - f \circ id_V) = \det(0) = 0$ ist also unsinnig!

• Der Satz gilt analog für A: $\chi_A(A) = 0$.

• Dass ein Polynom P ex. mit $P(f) = 0$ ex. wurde schon bei Termin 7_LA gesehen, als die Ex. des Mipos bewiesen wurde. Bemerkenswert an Cayley-Hamilton ist,

die annulierenden Polynome bilden ein Ideal in $K[X]$, es wird von μ_f erzeugt →

dass auch χ_f zu den annulierenden Polynomen gehört, so dass also $\underline{\underline{\mu_f \mid \chi_f}}$ folgt.

! → Kor.: Die Nullstellen von μ_f sind genau die Nst. von χ_f (= EWe).

Bew.: „$\subseteq$" Klar wegen $\mu_f \mid \chi_f$, „$\supseteq$": ist $v \neq 0$ mit $f(v) = \lambda v$ geg., gilt $f^i(v) = \lambda^i v$,

also $0 = \underbrace{\mu_f(f)}_{=0}(v) = \mu_f(\lambda) v$, also $\mu_f(\lambda) = 0$. □

Somit: $\chi_f = \ldots \boxed{*} \Rightarrow \mu_f = (X-\lambda_1)^{s_1} \cdots (X-\lambda_k)^{s_k}$ mit $1 \leq s_i \leq r_i$ für alle i.

- Bem: μ_f und χ_f besitzen bei Diag'barkeit dieselben irred. Teiler, gilt auch allgemeiner [→ JNF]
- Das Kor. zeigt: f diag'bar, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ versch. EWe von $f \Rightarrow \mu_f = (X-\lambda_1) \cdots (X-\lambda_k) = M_f$ oben.

  Auch die Umkehrung gilt [⇝ Jordan-Normalform, vgl. nächsten Termin].

(ev. fakultativ)

Bew. des Satzes von Cayley-Hamilton:

z.z.: $\forall v \in V: \chi_f(f)(v) = 0$.

Sei m der Grad des Mipos von f.

Dann ist $\tilde{\mathcal{B}} = \{id, f, \dots, f^{m-1}\} \in End(V)$ lin. unabh., setze $U := L(\tilde{\mathcal{B}})$ (lin. Hülle).

Da $\tilde{\mathcal{B}} \cup \{f^m\}$ lin. abh., ex. $a_0, \dots, a_{m-1} \in K: f^m = a_0 id_V + a_1 f + \dots + a_{m-1} f^{m-1}$.

Da $f(\tilde{\mathcal{B}}) \subseteq U$ ist $f(U) \subseteq U$, also ist $\tilde{f} := f_{|U}: U \to U$ ein Endo von U.

Bzgl. $\tilde{\mathcal{B}}$ hat $\tilde{f}$ die Abb. matrix $\tilde{A} = {}_{\tilde{\mathcal{B}}}[\tilde{f}]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & a_{m-1} \end{bmatrix} \in K^{m \times m}$.

Bestimme $\chi_{\tilde{A}}$ von $\tilde{f}$:

$$\chi_{\tilde{A}}(X) = det(\tilde{A} - X I_m) = det \begin{bmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -X & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -X \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & a_{m-1} - X \end{bmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \hookleftarrow \cdot X \\ \hookleftarrow \cdot X \end{matrix} = \dots$$

$$\dots = det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 + a_1 X + \dots + a_{m-1} X^{m-1} - X^m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{m-2} + a_{m-1} X - X^2 \\ 0 & \cdots & & 1 & a_{m-1} - X \end{bmatrix} = (-1)^{m+1} \cdot (a_0 + a_1 X + \dots + a_{m-1} X^{m-1} - X^m).$$

Ergänze nun $\tilde{\mathcal{B}}$ zu Basis $\mathcal{B}$ von V. Bzgl. $\mathcal{B}$ hat f eine Abb Matrix $A_f = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right]$ mit geeigneten Matrizen C, D, weil U f invariant ist.

Für χ_f folgt nach dem Kästchenmultiplikationssatz für Determinanten

$\chi_f = \chi_A = \chi_{\tilde{A}} \cdot \chi_D$. Aus $\chi_{\tilde{A}} \cdot \chi_D = \chi_D \cdot \chi_{\tilde{A}}$ folgt

$$\chi_A(A) = \chi_D(A) \circ \underbrace{\chi_{\tilde{A}}(A)}_{da\ = 0} = 0,$$

denn $\chi_{\tilde{f}}(f) = (-1)^{m+1}(a_0 + a_1 f + \dots + a_{m-1} f^{m-1} - f^m) = 0$ nach Def. der a_i. □

Bem: Im Bew. kommt eine "Begleitmatrix" vor.

Def: Sei $P \in K[X]$ normiert, $\deg P = m \geq 1$, $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$. Die Begleitmatrix von P ist die Matrix

$$A_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & -a_{m-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m-1} \end{bmatrix}.$$

(Die Begleitmatrix von $X - a_0$ ist $[a_0]$).

Dann ist $P = (-1)^m \cdot \chi_{A_P} = \mu_{A_P}$. [Konstruieren so Matrix zu Polynom P, die P als Mipo/char. Polynom hat]