11.12.13

Repetitorium WiSe 2013/14

Analysis-Teil:

Potenzreihen und Taylorformel

Potenzreihen

$D \subseteq \mathbb{R}$ oder $D \subseteq \mathbb{C}$

Eine Potenzreihe ist eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) mit

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n .$$

(auch $\mathbb{C}$ mögl.)

Hier ist $a \in D$ der Entwicklungspunkt, die $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$.
heißen Koeffizienten der Potenzreihe.
Ihre Werte können numerisch gut berechnet werden:
$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$

1.Bsp.: • Geom. Reihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ auf $D =]-1,1[$,
dort: $f(x) = \frac{1}{1-x}$

• Exponentialfkt. $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ auf $D = \mathbb{R}$

• Logarithmusfkt. $\log(x+1) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ auf $D =]-1,1]$

$\rightsquigarrow \log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$

Fall $x=1 \rightsquigarrow \log 2$ mit Abelschem Grenzwertsatz

Eine Potenzreihe ist eine Funktionenfolge:

$$(F_N(x))_{N \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

Daher greifen auf Potenzreihen auch die Sätze zu Funktionenfolgen.

Meist wird $a = 0$ als Entwicklungspunkt genommen.

Bei jeder Potenzreihe (um a) liegt einer der drei Fälle vor:

1. Kgz. nur für $x = a$
2. Kgz. für alle $x \in \mathbb{R}$
3. Kgz. für alle $x \in]a-R, a+R[=: I$

   $R > 0$ eine reelle Zahl, aber Divergenz für ein $x \notin I$

$\rightsquigarrow$ im 3. Fall heißt R Konvergenzradius und I Konvergenzintervall

(bei komplexen Potenzreihen ist der Konvergenzbereich ein Kreis mit Mittelpunkt a, kein Intervall!
$\rightsquigarrow$ "Konvergenzkreis")

Def. Kgz.radius: $R := \sup\{ r > 0 \,;\, \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ kgt. auf }]a-r, a+r[\}$,
falls 3. Fall vorliegt

in 1.: "$R = 0$", in 2.: "$R = \infty$"

Berechnung des Kgz.radius (nach Cauchy-Hadamard), für $a = 0$:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$$

Herleitung aus Wurzel- bzw. Quotientenkriterium:

- Setze $A := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, nach $\sqrt{\ }$-Kriterium: $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} < 1 \Rightarrow \sum b_n$ abs. kgt.
  " $> 1 \Rightarrow$ " divergent

  Setze $b_n = c_n x^n$, also:

  $\underbrace{\limsup \sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n}}_{= |x| \cdot A} < 1 \Rightarrow \sum c_n x^n$ abs. kgt., $|x| \cdot A > 1 \Rightarrow \sum c_n x^n$ div.

  Also: Konvergenz für $|x| < \frac{1}{A} = R$, Divergenz für $|x| > \frac{1}{A} = R$.

- Ebenso mit Quotientenkriterium, beachte $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} = \frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot x$.

Satz zur glm. Kgz. von (reellen) Potenzreihen:

Jede Potenzreihe konvergiert auf einem IV $[c, d]$, das ganz in ihrem Konvergenz-IV $]a-R, a+R[$ enthalten ist, gleichmäßig, d.h. gleichmäßig auf kompakten Teilmengen des Konvergenzkreises.

Für $x \in]a-R, a+R[$ gilt: x liegt in einem abg. IV $[c,d] \subseteq]a-R, a+R[$, nahe x konvergiert die Potenzreihe also gleichmäßig.

Daher gilt: • $\forall x \in]a-R, a+R[$: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right)'$

$$\overset{\text{glm.}}{\underset{\text{Kgz.}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left((x-a)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n (x-a)^{n-1}$$

d.h. Potenzreihen können gliedweise abgeleitet werden.

Folgerung: Potenzreihen sind auf ihrem Kgz. IV unendlich oft stetig diff'bar!

• $\forall u, v \in]a-R, a+R[$: $\int_u^v \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right) dx$

$$\overset{\text{glm.}}{\underset{\text{Kgz.}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_u^v (x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \left.\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\right|_u^v$$

d.h. Potenzreihen können gliedweise integriert werden.

2. <u>Bsp.:</u> Berechnung von $\log(1+x)$ als Potenzreihe:

$$\log'(1+x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad \text{für } |x| < 1, \text{ d.h. } -1 < x < 1$$

also ist $\log(1+x) = \int_0^x \log'(1+t)\, dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k dt$

$$\overset{\text{glm.}}{\underset{\text{Kgz.}}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Ebenso, mit derselben Idee: arctan-Reihe, $\arctan' y = \frac{1}{1+y^2}$

[$\frac{1}{1+y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n}$, dann gliedweise integrieren $\rightsquigarrow$ $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $|x| < 1$]

Identitätssatz für Potenzreihen / Koeffizientenvergleich:

Existiert ein $\delta > 0$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < \delta$ (d.h. für $x \in \,]a-\delta, a+\delta[$),
so folgt $\forall n \in \mathbb{N}_0 : b_n = c_n$,

d.h. dann müssen die Reihen vollständig identisch sein.

[Dies folgt auch schon, wenn die beiden Potenzreihen auf irgendeiner Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to a$ übereinstimmen.]

Fragestellung, die zur Theorie der Taylorreihen überleitet:

Geg. eine Funktion f, die nahe $x=0$ bel. oft diff'bar ist.
Gibt es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, die nahe x kgt. und deren (Funktions-)werte mit $f(x)$ übereinstimmen?
(Sie ist eindeutig bestimmt wegen Identitätssatz.)
Mit einer Potenzreihendarstellung lassen sich die Funktionswerte $f(x)$ dann leicht numerisch berechnen.

Taylorreihen

Taylor-Satz / Taylor-Formel:

Vor.: Sei I ein offenes IV, etwa $I = \,]b,c[\, \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$,
sei $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ und $a \in I$

Beh.: Dann gilt

$$\underbrace{f(x) = T_n f(x)}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{R_n f(x)}_{\text{Restglied}} \quad \text{für alle } x \in I,$$

wobei $\underline{R_n f(x) := \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt}$

das <u>Restglied</u> ist

und $\boxed{\underline{T_n f}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k}$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

das <u>n-te Taylorpolynom von f bzgl. a</u> bezeichnet. Klar: $\deg T_n f = n$.

<u>Bem:</u> 1) Für $n=0$ ist die Beh. gerade die Aussage des Hauptsatzes der Diff.+$\int$-Rg.

2) Man spricht auch von einer <u>Potenzreihenentwicklung</u> in a, $a\in I$ heißt auch <u>Entwicklungsstelle / Entwicklungspunkt</u>, denn $T_n f(x)$ wird für $n\to\infty$ zu einer Potenzreihe mit Entwicklungspkt. a

3) Die Potenzreihe $T[f,a](x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, falls f ∞ oft stetig diff'bar, braucht (außer für $x=a$) nicht zu konvergieren.
Diese Reihe heißt <u>Taylorreihe von f in a</u>.

4) Für $\underbrace{f\in\mathcal{C}^\infty(I)}_{f\ \infty\text{ oft st. diff'bar}}$ gilt: $\forall x\in I$:
$$T_n f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \iff R_{n+1}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
d.h. die Taylorreihe konvergiert genau dann gegen f im Punkt x, wenn das Restglied in x gegen 0 geht (für $n\to\infty$).

⚠ 5) Wenn $T_n f(x)$ für $n\to\infty$ konvergiert, muss der GW noch lange nicht $f(x)$ sein: <u>Bsp.:</u> $f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Hier ist $Tf(x)\equiv 0$, weil alle $f^{(k)}(0)=0$ sind [Übungsaufgabe mit de l'Hôpital + Induktion] $\rightsquigarrow Tf(x)$ kgt., aber nicht gegen $f(x)$ für $x\neq 0$!

6) Für eine Potenzreihe
$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ mit Konvergenzradius $r > 0$
gilt
$f \in \mathcal{C}^\infty(]a-r, a+r[)$ und $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ für alle $n = 0,1,2,\dots$,
d.h. die Taylorreihe von f in a
ist gleich der Potenzreihe f selbst und konvergiert gegen f.
• (wg. Identitätssatz für Potenzreihen)
• (punktweise und auf abg. Intervallen $\subseteq]a-r, a+r[$
auch gleichmäßig)
⇝ **Anwendung**: Die Taylorreihe von $\exp(x) = \sum \frac{x^n}{n!}$ in $a=0$ ist wieder $\sum \frac{x^n}{n!}$

7) Ist $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ und $\forall x \in I : f^{(n+1)}(x) = 0$,
so ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$
(nämlich $T_n f(x)$ zum Entwicklungspunkt a,
für jeden Punkt a kommt dasselbe Polynom heraus!)

8) Das Restglied $R_n f(x)$ läßt sich auch schreiben als
Lagrange-Restglied in der Form

$$\leadsto \quad R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

für ein $\eta \in I$ zwischen a und x (wegen MWS der $\int$-Rg).

9) Es ist $R_n f(x) = \varphi(x) \cdot (x-a)^n$ mit $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$.

10) Der Taylorsatz erlaubt eine Approximation

$f(x) \approx T_n f(x)$, der Fehler $R_n f(x)$ dieser

Abschätzung ist maximal $|R_n f(x)| \leq |\varphi(x)| \cdot |x-a|^n$,
was für x nahe a oft sehr klein ist.

Die Approximation ist sinnvoll, wenn $R_n f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ist, d.h. wenn die Taylorreihe auch wirklich die Funktionswerte approximiert. $R_n f(x)$ gibt dann die "Güte" der Konvergenz von $T_n f(x)$ gegen $f(x)$ an.

Die Potenzreihenentwicklung von Funktionen

1) $f(x) = \sin x$, entwickeln in $a = 0$:

Es ist $f(0) = 0$,
und mit $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$,
$f^{(4)}(x) = \sin x$ usw.,
also $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$ usw.
folgt:

$$Tf(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

(Lagrange-)
Fehler: $|R_n f(x)| \le \frac{1 \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Daher stellt die Taylorreihe wirklich die Funktion $\sin x$ überall dar, es folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

2) Analog:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

3) $f(x) = \frac{1}{c-x}$ in $a=0$:

Es ist $f(x) = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{c}} = \frac{1}{c} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{c}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c^{-k-1} x^k$, für $|x| < c$

Spezialfall $c=1$: $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ für $|x| < 1$ (geom. Reihe).

4) $f(x) = \log(1-x)$, entwickeln in $a=0$:
Haben: $f(0)=0$ und
$f'(x) = -(1-x)^{-1}$, $f''(x) = -(1-x)^{-2}$, $f'''(x) = -2\cdot(1-x)^{-3}$, ...,
also $f'(0) = -1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = -2!$, $f^{(4)}(0) = -3!$, ...,

d.h. $f^{(k)}(0) = -(k-1)!$ und $Tf(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{k!} \cdot x^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$,

mit Fehler $|R_n f(x)| \leq \frac{C(\varepsilon)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für $x \in]-1+\varepsilon, 1-\varepsilon[$

mit $\tilde{C}(\varepsilon) := \sup\{\underbrace{|f^{(n+1)}(x)|}_{\text{(div. für } x\to -1)};\ x \in]-1+\varepsilon, 1-\varepsilon[\}$, $\varepsilon > 0$.

Also gilt $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für alle $x \in]-1, 1[$.

Letzter Tip zur Nützlichkeit von Taylorreihen / Potenzreihen:
Grenzwertbestimmungen, die leichter als mit de l'Hôpital sind:

z.B.:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = ?$$

$$\text{Zähler} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots - 1 - x \approx \frac{x^2}{2} + x^3 \cdot (\ldots)$$

$$\text{Also: } \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \approx \frac{1}{2} + x \cdot (\ldots) \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2}$$