8.1.14

Repetitorium WiSe 2013/14

Analysis-Teil:

Stichworte:

(a) Topologie-Grundlagen: Intervalle, Umgebungen, offen und abgeschlossen, Häufungspunkt, isolierter Punkt, Kompaktheit, Zusammenhang, Stetigkeit, gleichgradige/gleichmäßige Stetigkeit, metrische und normierte Räume, Konvergenz in solchen Räumen, Koordinaten im $\mathbb{R}^n$, Banachscher Fixpunktsatz

(b) Kurven und Rektifizierbarkeit: parametrisierte Kurve, Bogenlänge, Rektifizierbarkeit

(a) Topologie-Grundlagen

- Motivation: wollen Konzepte "offen/abgeschl." Intervalle, Umgebungen, Konvergenz ... des $\mathbb{R}^1$ in den $\mathbb{R}^n$ übertragen $\rightsquigarrow$ Topologie [Ana 1 = Analysis in $\mathbb{R}^1$, Ana 2 = Analysis in $\mathbb{R}^n$]
- Behandeln dazu: normierte (Vektor-)Räume $\subseteq$ metrische Räume $\subseteq$ topologische Räume

Def.: Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißt normiert, falls es eine Norm auf V gibt. Eine Norm auf V ist eine Abb. $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall v, w \in V$:

a) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$, b) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$, c) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

"Norm = Abstand zu 0"

Def.: Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Metrik, d.h. einer Abb. $d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\forall x, y, z \in X$:

a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, b) $d(x,y) = d(y,x)$, c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Jeder normierte VR ist metrischer Raum mit der Metrik $d(x,y) := \|x - y\|$.
$\rightarrow$ Jede Norm $\|\cdot\|$ induziert Metrik! "Metrik = Abstand"

Def.: Ein topologischer Raum ist eine Menge X mit einer Topologie $\mathcal{T} \subseteq \overbrace{\{Z \subseteq X\}}^{\text{Potenzmenge von } X}$ mit a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, b) $Z_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} Z_i \in \mathcal{T}$, c) $Z_1, \ldots, Z_n \in \mathcal{T} \Rightarrow Z_1 \cap \ldots \cap Z_n \in \mathcal{T}$

Jeder metrische Raum ist ein topologischer Raum mit der Top. $\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{a \in M} B(a, r_a);\ M \subseteq X,\ r_a \in \mathbb{R}_{>0} \text{ für alle } a \in M \right\}$, wo $B(a,r) := \{x \in X;\ d(x,a) < r\}$ der offene Ball um a in X ist.

Die Elemente einer Topologie (bestimmte Teilmengen von X) heißen offen,
ihre Komplemente heißen abgeschlossen.

Es gilt für metrischen Raum X: $U \subseteq X$ offen, d.h. $U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in U \; \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Die „Axiome" a), b), c) einer Topologie spiegeln die Eigenschaften offener Intervalle des $\mathbb{R}^1$ wider: beliebige Vereinigungen offener Intervalle sind offen (= Vereinigung offener IVe), endl. Schnitte " " " " sind offen (= " " "),

Beispiele für Normen im $\mathbb{R}^n$: • p-Normen: $\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p}$, $p \geq 1$,
für $p = 2$ ist das die euklidische Norm
(= Standard-Abstand zum 0-Punkt)

• ∞-Norm: $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

$\rightarrow$ auch: endl. dim. $\mathbb{R}$-VR

Satz: Alle Normen des $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d.h. sind $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}^n$, so ex. Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Äquivalente Normen erzeugen dieselbe Topologie.

• Einige Topologie-Begriffe, hier für metrischen Raum X mit Bällen formuliert:

Umgebung: $U \subseteq X$ heißt Umgebung von $x \in U$, falls $\exists r > 0 : B(x, r) \subseteq U$.

innerer Punkt: $x \in X$ heißt innerer Punkt von $V \subseteq X$, falls V Umgebung von $x \in V$ ist.

Häufungspunkt: $x \in X$ heißt HP von $V \subseteq X$, falls $\forall r > 0 : B(x, r) \cap V \setminus \{x\} \neq \emptyset$,
d.h. falls jeder Ball um x einen von x verschied. Pkt. aus V enthält.

isolierter Punkt: $x \in X$ heißt isol. Pkt. von $V \subseteq X$, falls $\exists r > 0 : V \cap B(x, r) = \{x\}$,
d.h. falls ein Ball um x außer x keinen Pkt. aus V enthält.

Zusammenhang: $U \subseteq X$ heißt zusammenhängend, falls $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{T} : U \cap O_1 \neq \emptyset$, $U \subseteq O_1 \cup O_2$, $U \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset \Rightarrow U \cap O_2 = \emptyset$

Formulierung für topol. Räume

Kompaktheit: $K \subseteq X$ heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von K eine endl. Teilüberdeckung besitzt, d.h. $\forall (U_j)_{j \in I} \subseteq \mathcal{T}, \bigcup_{j \in I} U_j \supseteq K, \exists j_1, \ldots, j_m \in I : U_{j_1} \cup \ldots \cup U_{j_m} \supseteq K$.

Stetigkeit: $f : X \to Y$ heißt stetig, falls $\forall O \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X$. [Urbilder offener Mengen sind offen.]

nur im metr. Raum def'bar → **beschränkt**: $U \subseteq X$ heißt beschränkt, falls $\exists x \in X \exists r > 0: B(x,r) \supseteq U$.

Stetigkeit zw. metr. Räumen: $f: X \to Y$ stetig $:\Leftrightarrow \forall x_1 \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_2 \in X:$
$d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

" zw. normierten Räumen: $f: X \to Y$ stetig $:\Leftrightarrow \forall x_1 \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_2 \in X:$
$\|x_1 - x_2\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\|_Y < \varepsilon$

- Konvergenzbegriff
  im metrischen Raum: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kgt. $\Leftrightarrow \exists a \in X \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: d(x_n, a) < \varepsilon$
  im normierten Raum: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kgt. $\Leftrightarrow$ " " " " $\|x_n - a\| < \varepsilon$
- Cauchy-Konvergenzbegriff
  im metrischen Raum: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-kgt. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0: d(x_n, x_m) < \varepsilon$
  im normierten Raum: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-kgt. $\Leftrightarrow$ " " " $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$

- Ein normierter/metrischer Raum X heißt vollständig, falls darin jede Cauchyfolge konvergiert, d.h. einen Grenzwert in X hat.

Wichtige Sätze:
- X, Y metr. Räume, $f: X \to Y$ stetig $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq X$, $x_n \to a$ in X: $f(x_n) \to f(a)$ in Y.
  X, Y normierte Räume, " " " "
  wobei im jeweiligen Fall die genaue Def. von "kgt" beachtet werden muss, s.o.
  Also gilt auch allgemeiner: ε-δ-Stetigkeit $\Leftrightarrow$ Folgenstetigkeit
- X metr. Raum, $A \subseteq X$ abg. $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq A$, $x_n \to a \in X: a \in A$
- Jeder metrische Raum X ist hausdorffsch, d.h.
  für alle $x, y \in X$, $x \neq y$ ex. Umgebungen U von x bzw. V von y mit $U \cap V = \emptyset$.
- Im $\mathbb{R}^n$ sind die kompakten Teilmengen genau die abgeschlossenen beschränkten Teilmengen (Satz von Heine-Borel). [Kp. $\Rightarrow$ abg. & beschr. ✓, Kp. $\underset{\text{nur im } \mathbb{R}^n}{\Leftarrow}$ abg. & beschr.]
- Kompakte metrische Räume sind vollständig.
- Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.
- Stetige Abbildungen bilden kompakte Mengen auf kompakte ab. zush. zush.

Wichtige Konsequenz: Min/Max-Prinzip: kompakt in $\mathbb{R} \Rightarrow f([a,b])$ auch kompakt, also abg. & beschr.

- Eine auf einem abg. IV $[a,b]$ stetige Fkt. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Min./Max. an, d.h. $\sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\} = f(c)$ für ein $c \in [a,b]$, ebenso inf.
- Hier ist $[a,b]$ durch bel. kompakten Raum X ersetzbar!

Bsp. vollst. Raum: • $\mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm $\|\cdot\|$ als normierter $\mathbb{R}$-VR

[Dies gilt, da die Kgz./Cauchy-Konvergenz zur Koordinatenweisen Kgz./Cauchy-Kgz. äquivalent ist: Für $x_m = \begin{pmatrix} x_{m,1} \\ \vdots \\ x_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist $x_m \to a$ in $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geq m_0: \|x_m - a\| < \varepsilon$ [wg. der Äquivalenz aller Normen etwa $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$]

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geq m_0\ \forall j = 1, \ldots, n: |x_{m,j} - a_j| < \varepsilon$, analog Cauchy-Kgz.

In jeder Koordinaten j konvergiert eine Cauchy-Folge gegen ein a_j, da $\mathbb{R}$ vollständig, damit auch insgesamt gegen $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Also ist $\mathbb{R}^n$ vollst.]

- Bsp. nicht vollst. Raum: $\mathcal{C}([a,b]) = \{f: [a,b] \to \mathbb{R};\ f \text{ stetig}\}$ mit Norm $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$ [ohne Beweis]
- Bsp. ∞-dim. vollst. norm. Raum: $\mathcal{C}([a,b])$ mit Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\}$ [ohne Beweis]

- gleichmäßige Stetigkeit von $f: X \to Y$, wo X, Y metr. Räume, liegt vor falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in X: d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

Satz: Stetige Funktionen sind auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig.

[• gleichgradige Stetigkeit wird für Satz von Arzela-Ascoli benötigt]

- Banachscher Fixpunktsatz: auch in metr. Raum richtig; ein vollst. normierter VR heißt Banachraum

Sei $(V, \|\cdot\|)$ vollständiger normierter Raum, $A \subseteq V$ abgeschlossene Teilmenge, $\phi: A \to A$ eine Kontraktion, d.h. $\exists \theta \in\,]0,1[\ \forall x,y \in A: \|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \theta \cdot \|x - y\|$.

Dann ex. genau ein $a \in A$ mit $\phi(a) = a$, d.h. a ist Fixpunkt von ϕ.

[Ist $x_0 \in A$ dabei ein bel. Startwert, so konvergiert die Folge $x_{n+1} := \phi(x_n)$, also $x_0, \phi(x_0), \phi(\phi(x_0)), \ldots$ gegen den Fixpunkt a und es gilt

$$\|x_n - a\| \leq \frac{1}{1-\theta} \cdot \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} \|x_1 - x_0\|.]$$

Bsp.: $T: [1,4] \to [1,4]$, $T(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ hat Fixpunkt.

Weitere Bemerkungen / Wissenswertes zum Konvergenzbegriff in metrischen Räumen:

- Konvergenz hängt von Metrik ab:

  In $\mathbb{R}$ sind $d_1(x,y)=|x-y|$ und $d_2(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$ zwei Metriken.

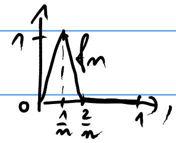
  Die Folge $x_n=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, kgt. bzgl. d_1 gegen 0, und kgt. gar nicht bzgl. d_2.

- Ist Konvergenz normabhängig?

  Im endlich-dimensionalen Fall nicht, da dann alle Normen äquivalent.

  Im unendlich-dimensionalen Fall ja:

  Bsp. $X=\mathcal{C}([a,b])$, wegen $\|f\|_1\le(b-a)\|f\|_\infty$ für alle $f\in\mathcal{C}([a,b])$ konvergiert jede bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ kgte Folge auch bzgl. $\|\cdot\|_1$, umgekehrt muss das nicht so sein, Bsp.: $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$,



  also $f_n\to 0$ in $\|\cdot\|_1$, aber f_n kgt. nicht bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

- Beweis für: $K\subseteq X$ kp., $A\subseteq K$ abg. $\Rightarrow A$ kp.

  ⌜Sei $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von A. Es ist $U:=X\setminus A$ offen und $\bigcup_{i\in I}U_i\cup U=X\supseteq K$. Da K kp., ex. $i_1,\dots,i_m\in I$ mit $U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}\cup U\supseteq K$. Es folgt $U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}\supseteq A$. Also ist A kp.⌟

- Beweis für: X metr. Raum, $K\subseteq X$ kp. $\Rightarrow K$ abg. und K beschr.

  ⌜• Z.z.: $X\setminus K$ offen. Sei dazu $b\in X\setminus K$. Da X hausdorffsch, gilt:

  $\forall x\in K\ \exists$ offene Umg. U_x von x $\exists$ off. Umg. V_x von b: $U_x\cap V_x=\emptyset$

  Da $\bigcup_{x\in K}U_x\supseteq K$ und K kp., ex. $x_1,\dots,x_s\in K$: $K\subseteq U_{x_1}\cup\dots\cup U_{x_s}$.

  Damit ist $V:=V_{x_1}\cap V_{x_2}\cap\dots\cap V_{x_s}$ offene Umg. von b mit $V\cap\bigcup_{i=1}^{s}U_{x_i}=\emptyset$, also $V\subseteq X\setminus K$.

  Somit ist $X\setminus K$ Umg. eines jeden $b\in X\setminus K$, also offen.

  • Z.z.: K beschränkt.

  Sei $a\in K$. Jeder Punkt $x\in X$ hat einen endl. Abstand von a, also gilt

  $$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n(a)=X,$$

  d.h. $(B_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ ist Überdeckung von K.

Da K kp., genügen endl. viele der Bälle zur Überdeckung von K,
d.h. $\exists\, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}: K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_{m_j}(a)$.
Mit $m := \max\{m_1, \dots, m_k\}$
folgt $K \subseteq B_m(a)$. Also ist K beschränkt. ⌋

• Charakterisierung des Kompaktheitsbegriffs mit Folgenkompaktheit:
Sei X metrischer Raum. Dann: $K \subseteq X$ (überdeckungs-) kompakt $\Leftrightarrow$ K folgenkompakt,
d.h. jede Folge aus K besitzt eine in K konvergente Teilfolge.
⌈ „$\Rightarrow$": Ann.: (x_n) Folge in K ohne konvergenter Teilfolge.
Dann sind die Mengen $F_m := \{x_n;\ n \geq m\}$ abgeschl. und $\bigcap F_m = \emptyset$.
Da K kp., ex. endl. viele F_m mit leerem Durchschnitt ↯.
„$\Leftarrow$": [ohne Beweis; benutzt "2. Abzählbarkeitsaxiom" = Topologie hat abzählbare Basis...] ⌋

Bem.: diese Charakterisierung verallgemeinert den Satz von Bolzano-Weierstraß.

• Bsp. für $S \subseteq X$ abg. & beschr., nicht kp.: Einheitssphäre $S = \{\|x\| \leq 1\}$
in normiertem $\mathbb{R}$-VR, der unendlichdimensional ist. Abg. & beschr.: klar,
S nicht kompakt: Zeigen: S ist nicht folgenkompakt:
⌈ Sei $x_1 \in S$ und $X_1 = \mathbb{R} x_1$ der von x_1 aufgespannte UR.
Da $\dim X_1 < \infty$, ist X_1 abgeschlossen.
Nach dem Lemma von Riesz ex. $x_2 \in S$ mit $\|x_1 - x_2\| > \frac{1}{2}$.
Sei $X_2 = \mathbb{R}x_1 + \mathbb{R}x_2$, dann ex. $x_3 \in S$ mit $\|x_3 - x\| > \frac{1}{2}$ für alle $x \in X_2$ usw.
Erhalten Folge $(x_k) \subseteq S$ mit $\|x_k - x_j\| > \frac{1}{2}$ für $k \neq j$,
diese Folge kann keine konvergente Teilfolge besitzen.
Also kann S nicht (folgen-) kompakt sein. ⌋

Bem.: Lemma von Riesz: Sei X normierter VR, $Y \subsetneq X$ abg. UR, $0 < \vartheta < 1$.
Dann ex. $\xi \in X$ mit $\|\xi\| = 1$ und $\underbrace{d(\xi, Y)}_{= \inf\{\|\xi - y\|;\ y \in Y\}} \geq \vartheta$. [ohne Beweis]

(d) Kurven und Rektifizierbarkeit

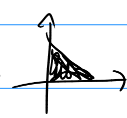
- (parametrisierte) Kurve: stetige Abb. $f: I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein IV

⇝ Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_n$: $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ für $t \in I$ "Parameter"

$[f_i := pr_i \circ f,\ pr_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i]$

- f (st.) db $\Longleftrightarrow$ alle f_i (st.) db.
- f db ⇝ $f'(t) := (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$ heißt Tangentialvektor von f in t bzw. von f im Punkt $(t, f(t))$ und läßt sich als Limes von Sekanten auffassen: $f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t))$
- Rektifizierbarkeit: $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ st., $a < b$, rekt'bar $:\Longleftrightarrow \exists L > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall$ Unterteilungen $a = t_0 < \dots < t_k = b$ mit Feinheit δ: $\left| \sum_{1 \le i \le k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - L \right| < \varepsilon$
- f stetig db $\Rightarrow$ f rekt'bar und Länge berechenbar mit der:
- Bogenlängenformel: $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ st. db $\Rightarrow$ $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$

- f ist nicht rektifizierbar, wenn $\forall L > 0\ \forall \delta > 0\ \exists$ Unterteilung mit Feinheit $< \delta$: $\sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \ge L$.

- es gibt surjektive Kurven $[0,1] \to \Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{\ge 0}, x + y \le 1\}$ 
- es gibt diff'bare Kurven, die nicht rekt'bar sind
- Bogenlänge abh. von Wahl der Norm, normalerweise nimmt man eukl. Norm $\|\cdot\|_2$
- Bogenlänge auch numerisch berechenbar mit Bogenlängenformel + Taylorsatz

Mögliche Aufgaben z.B. Tangentenglg. in einem Pkt. einer Kurve $g: I \to \mathbb{R}^n$ berechnen oder Bogenlängen ausrechnen mit Bogenlängenformel

Begründung der Bogenlängenformel: Haben: $\int_a^b \|f'(t)\| dt \approx \sum_{i=1}^{k} \|f'(t_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1})$

für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ von $[a,b]$, denn r.S. = Riemann-Summe

Weiter ist $\|f'(t_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1}) \underset{MWS}{\approx} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$, und $\sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$ ist die Polygonzuglänge für diese Unterteilung, welche für feinere Unterteilungen die Bogenlänge approximiert.