15.1.14

Repetitorium WiSe 2013/14

Lineare Algebra-Teil:

Stichworte:

Geometrie im $\mathbb{R}^2$ und in euklidischen Vektorräumen
Spat, Simplex, Spiegelungen und Drehungen, elementargeometrische Sätze
mit vektoriellem Beweis, Geraden, Abstände zwischen Punkt und Geraden, orthogonale
Gruppe, Geraden und Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$, Hessesche Normalform, Orientierung
und Determinantenvorzeichen, orthogonale und selbstadjungierte Abbildungen,
Spektralsatz, Hauptachsentransformation

(a) Euklidische/unitäre VRe

Euklidischer VR: VR mit positiv definitem reellen Skalarprodukt
Unitärer VR: VR mit positiv definiter hermitescher Form

• Schmidt-Orthoverfahren zeigt:
Jeder euklidische/unitäre VR abzählbarer Dimension besitzt eine ONB.

• Wichtigste Formel in diesen VRen: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung („CS")
$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\| \text{ für alle Vektoren } x,y,$$
und „=" gilt $\Leftrightarrow$ x,y linear abhängig

[Die Norm ist hier $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$, die zu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gehört.]

Def.: • Endomorphismen in eukl./unitären VR heißen auch Operatoren.
Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein eukl./unit. VR über $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ und $f\in End(V)$.

• $f^*\in End(V)$ heißt adjungierter Operator/Endo zu f,
falls $\langle f(x),y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$ für alle $x,y\in V$ gilt.

[ist $\dim V<\infty$, so ex. f^* und ist eind. best.]

• f heißt selbstadjungiert (für $\mathbb{R}$-VR auch symmetrisch, für $\mathbb{C}$-VR hermitesch), falls $f^*=f$

• f heißt orthogonal (für $\mathbb{C}$-VR auch unitär genannt), falls $f\circ f^* = f^*\circ f = id_V$

• f heißt normal, falls $f\circ f^* = f^*\circ f$ gilt

Entsprechendes für Matrizen $A\in K^{n\times n}$ mit $K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$:

• A orthogonal, falls $A^TA=I_n$ • A unitär, falls $\bar{A}^TA=I_n$

• ist A orthogonal und $\det A = 1$, so ist A eine Drehmatrix.

Wichtige Zusammenhänge: Sei V eukl./unit. VR, $\dim V < \infty$, B ONB, $f \in \mathrm{End}(V)$.

Dann gilt: 1. $M_B^B(f^*) = \overline{M_B^B(f)}^T$

2. $f^*(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, f(b_j) \rangle b_j$ für alle $x \in V$, wenn $B = (b_1, \ldots, b_n)$

3. $K = \mathbb{C}$: f selbstadj. $\Leftrightarrow$ $M_B^B(f)$ hermitesch

$K = \mathbb{R}$: f selbstadj. $\Leftrightarrow$ $M_B^B(f)$ symmetrisch

4. $K = \mathbb{C}$: f unitär $\Leftrightarrow$ $M_B^B(f)$ unitär

$K = \mathbb{C}$: f symmetrisch $\Leftrightarrow$ $M_B^B(f)$ symmetrisch

5. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist unitär / orthogonal

(ii) $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in V$

(iii) f ist längentreu, d.h. $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$

(iv) $\forall x \in V$: $\|x\| = 1 \Rightarrow \|f(x)\| = 1$

(v) f bildet beliebige ONBs auf ONBs ab

6. Ist f selbstadjungiert, so sind alle Eigenwerte von f reell und das charakteristische Polynom von f zerfällt in reelle Linearfaktoren.

Folgerung: Alle Eigenwerte einer symmetrischen / hermiteschen Matrix sind reell!

Weiter gilt: • $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal $\Rightarrow \det A \in \{1, -1\}$

• $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär $\Rightarrow |\det A| = 1$

• A orthogonal / unitär $\Leftrightarrow$ Spalten von A bilden ONB des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$

$\Leftrightarrow$ Zeilen " " " "

$\Leftrightarrow$ es gibt ONBs B, B' des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ mit $A = M_B^{B'}(\mathrm{id})$

- f orthogonal bzgl. StandardSP $\Rightarrow f$ erhält Längen / Winkel
  [denn: f längentreu wg. 5(iii), f winkeltreu wg. 5(ii) und Cosinussatz: $\langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\sphericalangle(x,y)$]

- A symmetrisch/unitär $\Rightarrow$ Eigenvektoren zu verschiedenen EWen sind orthogonal

- Die Gruppe der orthogonalen Matrizen (bzgl. Matrixmult.) heißt orthogonale Gruppe $O(n) = \{A \in GL_n;\ A^T A = I_n\}$; $GL_n = \{A \text{ inv'bar}\} = \{A; \det A \neq 0\}$
  Die Untergruppe $SO(n) = \{A \in O(n);\ \det A = 1\}$ ist die Gruppe der Drehmatrizen / spezielle orthogonale Gruppe

Normalform für orthogonale Abbildungen: Zu jeder orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ex. ONB $B = (b_1|\dots|b_n)$ des $\mathbb{R}^n$, bzgl. der A die Gestalt

$$B^T A B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & T_1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & T_s \end{pmatrix}, \text{ wo } T_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & -\sin\varphi_j \\ \sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ ebene Drehmatrizen}$$

Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen / Hauptachsentransformation:

1. Form:
Sei V endlichdim. euklidischer/unitärer $\mathbb{C}$-VR, $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert.
Dann besitzt V eine ONB aus Eigenvektoren von f.
[Dies gilt insb. für symmetrische/hermitesche Matrizen.]

2. Form: (Hauptachsentransformation hermitescher Matrizen)
Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch, dann ex. unitäre Matrix P mit $D = P^{-1}AP = \bar{P}^T A P$ Diagonalmatrix, in deren Hauptdiagonalen die EWe von A stehen, und die Spalten von $\bar{P}$ bilden eine ONB aus EVen von $\bar{A}$.
Analog $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch (mit P statt $\bar{P}$, die Drehmatrix ist).

3. Form: (Hauptachsentransformation hermitesche Formen / quadratische Formen)
Ist b hermitesche Form / Skalarprodukt auf V, dann ex. ONB B bzgl. b.
B erhält man durch eine ONB aus EVen des selbstadj. Operators f mit $b(x,y) = \langle f(x), y\rangle$.

Hauptachsentransformation und geometrische Bedeutung:
Die Gruppe $O(n)$ ist durch Spiegelungen erzeugt [jede Abb. $f \in O(n)$ ist Produkt endlich vieler Spieg.]

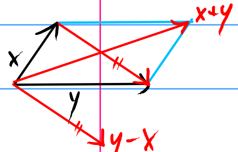
(b) Geometrie im $\mathbb{R}^2$ bzw $\mathbb{R}^n$

Spat: $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \operatorname{spat}(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$

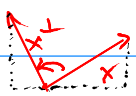
Simplex: " $\Delta(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid 0 \leq \lambda_i \text{ und } \sum \lambda_i \leq 1\}$

Es gilt: $\operatorname{vol}(\operatorname{spat}(v_1, \dots, v_n)) = \det(v_1, \dots, v_n) = n! \cdot \operatorname{vol} \Delta(v_1, \dots, v_n)$

- elementargeometrische Sätze mit Vektoriellem Beweis $[\mathbb{R}^n]$:
  - Satz vom Rechteck: Parallelogramm ist Rechteck $\Leftrightarrow$ Diagonalen gleichlang
    $\ulcorner \|x-y\|^2 = \|x+y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0 \lrcorner$



  - Satz vom Rhombus: Parallelogramm hat gleichlange Seiten $\Leftrightarrow$ Diagonalen senkrecht
    $\ulcorner \langle x-y, x+y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|x\| = \|y\| \lrcorner$



- Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im $\mathbb{R}^2$: $\perp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto x^\perp := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, falls $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- Lie-Klammer: $[x,y] := \langle x^\perp, y\rangle = \det(x,y)$, ist bilinear & schiefsymmetrisch:
  $[x,y] = -[y,x]$
- Es gilt: $\langle x,y\rangle^2 + [x,y]^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, vgl. CS-Ungl.

Geradengleichungen im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^n$:

Parameterdarstellung: $G_{P,a} = \{P + ta \mid t \in \mathbb{R}\} = P + \mathbb{R}a$
ist die Gerade im $\mathbb{R}^n$ mit $P \in G_{P,a}$ "in Richtung" $a \in \mathbb{R}^n$,
a heißt Richtungsvektor

Gleichungsdarstellung (Hyperebene im $\mathbb{R}^n$):
$H_{c,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c\rangle = \alpha\}$ für $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$,
dies definiert für $n=2$ eine Gerade $G_{P,a}$ mit $c = a^\perp$, der Normalen von $G_{P,a}$

Berechnung von Schnittpunkten zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$):

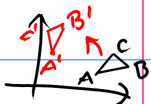
Gerade 1	Gerade 1	Schnittpkt.	Voraussetzung
$G_{P,a}$	$G_{Q,b}$	$G_{P,a} \cap G_{Q,b} = \{\frac{1}{[a,b]}([Q,b]a - [P,a]b)\}$	$[a,b] \neq 0$
$G_{P,a}$	$H_{c,\alpha}$	$G_{P,a} \cap H_{c,\alpha} = \{P + \frac{\alpha - \langle P,c\rangle}{\langle a,c\rangle} \cdot a\}$	$\langle a,c\rangle \neq 0 \Leftrightarrow [a,c^\perp] \neq 0$
$H_{c,\alpha}$	$H_{d,\beta}$	$H_{c,\alpha} \cap H_{d,\beta} = \{\frac{1}{[c,d]}(\beta c^\perp - \alpha d^\perp)\}$	$[c,d] \neq 0$

<u>Hessesche Normalform:</u> Ist die Gerade $H_{c,\alpha}$ im $\mathbb{R}^2$ geg. mit $\|c\|=1$, dann ist $|\langle P,c\rangle-\alpha|$ der Abstand von $P\in\mathbb{R}^2$ zu $H_{c,\alpha}$.

<u>Orthogonale Gruppe im $\mathbb{R}^2$:</u> $O(2):=O^+(2)\cup O^-(2)\subseteq GL_2=\{A\in\mathbb{R}^{2\times2}\mid \underbrace{\det A\neq 0}_{\Leftrightarrow A \text{ invbar}}\}$

wobei $O^+(2)=\{A\in GL_2\mid A^T=A^{-1},\ \det A=+1\}$

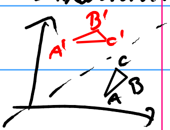
orientier-erhaltend:

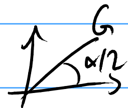


$=\{A\in GL_2\mid A=\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}}_{\text{Drehung um Winkel }\alpha=:T(\alpha)} \text{ für ein } \alpha\in[0,2\pi)\}=:\underbrace{SO(2)}_{\text{(orientierungs-erhaltend)}}$

und $O^-(2)=\{A\in GL_2\mid A^T=A^{-1},\ \det A=-1\}$

orientier-umkehrend:





$=\{A\in GL_2\mid A=\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}}_{\text{Spiegelung an Geraden durch 0 zum Winkel }\frac{\alpha}{2}=:S(\alpha)} \text{ für ein } \alpha\in[0,2\pi)\}$ (orientierungs-umkehrend)

Es ist $O(2)=\{A\in GL_2\mid \|x\|=\|Ax\| \text{ für alle } x\}=\{A\in GL_2\mid \langle Ax,Ay\rangle=\langle x,y\rangle \text{ f.a. } x,y\}$
$=\{A\in GL_2\mid A^T=A^{-1}\}$ die Gruppe der orthogonalen 2×2-Matrizen.

<u>Geometrie im $\mathbb{R}^n$:</u>

- <u>Gerade</u> im $\mathbb{R}^n$: $G_{P,a}=P+\mathbb{R}a$ für $P,a\in\mathbb{R}^n$
- <u>Hyperebene</u> im $\mathbb{R}^n$: $H=P+U$ mit $P\in\mathbb{R}^n$, U ein UVR des $\mathbb{R}^n$ mit $\dim U=n-1$,
  - dann ist $H=\{v\in\mathbb{R}^n\mid \langle v,c\rangle=\alpha\}=H_{c,\alpha}$ für $c\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$
  - ist $\|c\|=1$, dann liegt $H_{c,\alpha}$ in <u>Hessescher Normalform</u> vor
- deren Schnittpunkt: $G_{P,a}\cap H_{c,\alpha}=\{P+\frac{\alpha-\langle P,c\rangle}{\langle a,c\rangle}a\}$, falls $\langle c,a\rangle\neq 0$, d.h. $G_{P,a}\nparallel H_{c,\alpha}$
- Hessesche Normalform/Abst. Pkt. Q zu Geraden: $\operatorname{dist}(Q,G_{P,a})=\frac{1}{\|a\|}\sqrt{\|a\|^2\|P-Q\|^2-\langle a,P-Q\rangle^2}$

- <u>Orthogonale Gruppe im $\mathbb{R}^n$:</u>

<u>Def:</u> Ein $f\in\operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ heißt <u>Isometrie</u>, falls $\langle x,y\rangle=\langle f(x),f(y)\rangle$ für alle $x,y\in\mathbb{R}^n$

- f Isometrie $\Leftrightarrow$ $f=P+g$ für ein $P\in\mathbb{R}^n$, $g\in O(n)$
- f <u>Bewegung</u> $\Leftrightarrow$ f Isometrie mit $f=P+g$ und $g\in SO(n)$, d.h. $\det g=1$

<u>Satz:</u> $O(n)$ wird erzeugt von den Spiegelungen an $H_{c,0}$, d.h. jedes El. von $O(n)$ ist Produkt (von $\le n$) solcher Spieg.

$\rightsquigarrow$ im $\mathbb{R}^3$ ist jede spezielle orthogonale Abb. (El. von $SO(3)$) eine Drehung
(zwei Spiegelungen hintereinanderausgeführt ist eine Drehung)