29.1.14

Repetitorium WiSe 2013/14

Analysis-Teil:

(Themen: fakultativ)

Stichworte:

(a) Untermannigfaltigkeiten und Immersionen: Flächen, Oberflächenintegrale, UMF, Immersionen

(b) Mehrdimensionale Integration: mehrdimensionales Riemann-Integral, Lebesguemaß und -integral, Satz von Fubini, vektorwertige Integrale, parameterabhängige Integrale

(a) UMFen und Immersionen

Def. Immersion: Sei $T \subset \mathbb{R}^k$. Eine stetig diff'bare Abb. $\varphi: T \to \mathbb{R}^n$ heißt Immersion, falls $\forall t \in T$: $\operatorname{Rang} D\varphi(t) = k$.

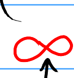
(Es folgt $n \geq k$)

(Dann: $\forall t \in T$ $\exists$ Umg. $V \subseteq T$ von t: $\varphi|_V : V \to \varphi(V)$ ist injektiv und ein Homöomorphismus.)

(Ist Verallg. einer nichtsing. Kurve ($k=1$).)

Def. UMF: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale UMF von $\mathbb{R}^n$, falls $\forall a \in \mathbb{R}^n$ $\exists$ offene Umg. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a $\exists$ $T \subset \mathbb{R}^k$ $\exists$ Immersion $\varphi: T \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(T) = M \cap U$

Anschaulich: in jedem Punkt $a \in M$ sieht M (lokal gesehen) so aus wie eine k-dimensionale Ebene, d.h. ist dazu diffeomorph (nach Einschränken auf Umgebungen).

Bsp. für $k=1$:  ist UMF,  ist keine UMF, da die Menge in diesem Punkt nicht lokal wie $\mathbb{R}^1$ aussieht

Bem.: Die genannte Def. einer UMF lautet kurz:

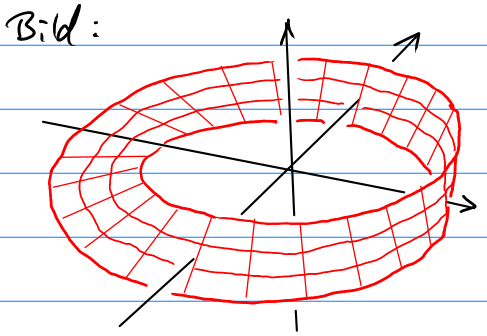
"M besitzt eine lokale Parameterdarstellung $\varphi: T \to M \cap U$".

Eine weitere Kurz: "M ist lokal Nullstellenmenge einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$":

$\forall a \in M$ $\exists$ $U \subset \mathbb{R}^n$, $a \in U$, $\exists f: U \to \mathbb{R}^{n-k}$: $M \cap U = \{x \in U;\ f(x) = 0\}$ und $\operatorname{Rg} f'(a) = n-k$.

- UMFs sind ein allgemeines Konzept, "Flächen/Kurven" im $\mathbb{R}^n$ zu studieren. Manchmal wird gefordert, dass diese zusammenhängend sind.
- UMFs brauchen nicht kompakt zu sein.
- Selbstdurchdringungen und Spitzen sind bei UMFs nicht zugelassen; sie sind an jeder Stelle (d.h. "lokal") schön glatt, da sie dort wie $\mathbb{R}^k$ aussehen.
- Wird eine UMF nahe einem Pkt. a als Nullstellenmenge von f dargestellt, dann ist der Tangentialraum in a der Kern der linearen Näherung f' in a.
- Eine lokale Parameterdarstellung φ heißt auch Karte von M.
  Eine Familie $(\varphi_j)_{j\in J}$ von Karten, die M überdecken, heißt Atlas von M.
  Zwei Karten φ_1, φ_2 von M heißen gleichorientiert, wenn $\tau := \varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$ orientierungstreu ist, d.h. $\det(\tau'(a)) > 0$ für alle $a \in M$ gilt.
  M heißt orientierbar, wenn sie einen Atlas besitzt, in dem alle Karten gleichorientiert sind.
  Das klassische Beispiel einer nichtorientierbaren UMF in $\mathbb{R}^3$ ist das Möbiusband:
  $$M = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \sin(u/2)\cos(u) \\ \sin(u/2)\sin(u) \\ \cos(u/2) \end{pmatrix};\ -\tfrac{1}{2} \le v \le \tfrac{1}{2},\ 0 \le u \le 2\pi \right\}.$$

  Bild:



- Die Integrationstheorie auf UMFs liefert die allgemeine Formel des $(n-1)$-dimensionalen Volumens der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre $S_{n-1} = \{\|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$, nämlich
  $$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad \text{Bsp.: } \omega_2 = 2\pi,\ \omega_3 = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = \frac{2\pi^{3/2}}{\sqrt{\pi}/2} = 4\pi$$
- Die Einheitskugel $B_n := \{\|x\| \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ hat das n-dimensionale Volumen $\frac{1}{n}\cdot\omega_n$, Bsp.: $\frac{1}{2}\omega_2 = \pi$, $\frac{1}{3}\omega_3 = \frac{4\pi}{3}$

(b) Mehrdimensionale Integration & einfache Version des Satzes von Fubini

A. Parameterabhängige Integrale

Satz 1: Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a<b$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: [a,b] \times U \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist $\varphi: U \to \mathbb{R}$, $\varphi(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$, stetig.

Satz 2: Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ kompakte Intervalle, $f: I \times J \to \mathbb{R}$ stetig und nach y stetig diff'bar, d.h. $\forall x \in I$: $f(x,\cdot): J \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$, stetig db., d.h. $\forall x \in I\ \forall y \in J$: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ex. und ist stetig in y.

Dann ist $\varphi: J \to \mathbb{R}$, $\varphi(y) := \int_I f(x,y)\,dx$ stetig db

und es ist $$\frac{d\varphi}{dy} = \int_I \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$ "Differenzieren kann unter das $\int$ gezogen werden"

Bem.: Satz 2 besagt, wie parameterabhängige Integrale berechnet werden können.

1. **Bsp.:** $\varphi(\alpha) := \int_0^1 \cos(\alpha x)\,dx$, haben $f(x,\alpha) := \cos(\alpha x)$, stetig auf $[0,1] \times \underbrace{[\frac{1}{2}, 4]}_{\text{für Satz, jedes andere kp. I geht auch}}$,

f ist dort auch stetig diff'bar nach y.

Dann:
$$\varphi'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha}(\cos(\alpha x))\,dx = \int_0^1 x \cos(\alpha x)\,dx = \frac{x}{\alpha}\sin \alpha x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)\,dx$$
$u' = 1$, $v = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)$ usw. ...

2. **Bsp.:** Berechnung von $J(\alpha) := \int_0^\infty \frac{1-\cos(\alpha x)}{x} \cdot e^{-kx}\,dx$ durch Differenzieren nach α:
Es ist $J'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1-\cos(\alpha x)}{x} \cdot e^{-kx}\,dx = \int_0^\infty e^{-kx} \sin(\alpha x)\,dx$
$$= \frac{e^{-kx}}{k^2+\alpha^2}(-k\sin(\alpha x) - \alpha\cos(\alpha x))\Big|_{x=0}^\infty = \frac{\alpha}{k^2+\alpha^2},$$
also $J(\alpha) = \frac{1}{2}\log(\alpha^2+k^2) + C$. Da $J(\alpha)=0$, ist $C = -\frac{1}{2}\log(1+\frac{\alpha^2}{k^2})$,
also $J(\alpha) = \frac{1}{2}\log(1+\frac{\alpha^2}{k^2})$. Beachte: Der Integrand ist an der unteren Gr. 0 stetig forts'bar und es durfte unter dem $\int$-Zeichen differenziert werden, da Integrand und partielle Ableitung eine integrierbare Majorante haben, etwa e^{-kx} für großes x.

B. Der Satz von Fubini

<u>Satz 3 (Satz von Fubini):</u> $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ stetig

$$\Rightarrow \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Schreiben für diesen Wert auch $\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,d(x,y)$.

<u>1. Bsp.:</u>
$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,dy\right) dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,dx\right) dy$$
$$= \int_a^b \frac{dy}{1+y} = \underline{\underline{\log\frac{1+b}{1+a}}}.$$

<u>2. Bsp.:</u>
$$\int\limits_{[1,2]\times[3,4]} \frac{d(x,y)}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{dy}{(x+y)^2}\right) dx = \int_1^2 \frac{-1}{x+y}\Big|_{y=3}^{4}\,dx$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) dx = \left(\log(x+3) - \log(x+4)\right)\Big|_{x=1}^{2} = \underline{\underline{\log\frac{25}{24}}}.$$

<u>3. Bsp.:</u> Wegen $0^0 := 1$ ist $(xy)^{xy} = \exp(xy\log(xy))$ stetig in $[0,1]\times[0,1]$.
Daher liefert Fubini:

$$J := \int\limits_{[0,1]^2} (xy)^{xy}\,d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 (xy)^{xy}\,dx\right) dy \underset{\substack{\text{Subst.}\\ t=xy}}{=} \int_0^1 \frac{1}{y}\left(\int_0^y t^t\,dt\right) dy$$

$$= \log(y)\cdot \int_0^y t^t\,dt\,\Big|_{y=0}^{1} - \int_0^1 y^y\cdot\log(y)\,dy.$$

Nun: $\lim\limits_{y\to 0} \frac{1}{y}\int_0^y t^t\,dt \underset{\text{de l'Hopital}}{=} \lim\limits_{y\to 0} y^y = 1$ da $\lim\limits_{y\to 0+} y\log y = 0$.

Also folgt
$$J = -\int_0^1 y^y\log(y)\,dy \underset{(y^y)' = y^y\log(y) + y^y}{=} \int_0^1 y^y\,dy - \int_0^1 (y^y)'\,dy = \underline{\underline{\int_0^1 y^y\,dy}}.$$