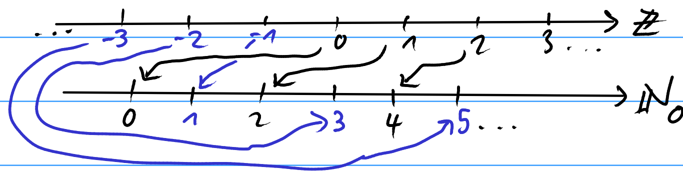
Zusatz: Abzählbarkeit und Cantorsche Diagonalverfahren

Def.: Sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$.

- X heißt endlich $:\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}\ \exists$ bijektive Abb. $f: \{1, \dots, n\} \to X$
- X heißt unendlich $:\Leftrightarrow$ X nicht endlich
  - Bsp.: $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \dots$
- X heißt abzählbar $:\Leftrightarrow \exists$ injektive Abb. $f: X \to \mathbb{N}_0$
- X heißt überabzählbar $:\Leftrightarrow$ X nicht abzählbar
- X heißt abzählbar unendlich $:\Leftrightarrow$ X abzählbar und unendlich

Bsp.: $\mathbb{N}$, $\{1, \dots, 10\}$, $\mathbb{Z}$ abzählbar

Beweis, dass $\mathbb{Z}$ abzählbar: Def. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ durch $f(z) := \begin{cases} 2z, & \text{falls } z \geq 0 \\ -(2z+1), & \text{sonst} \end{cases}$



1. Satz: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

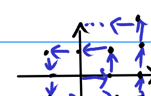
1. Bew.: mit dem 1. Cantorschen Diagonalverfahren:

Schreibe die El. $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, tabellarisch: (Mehrfachnennungen ok)

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \dots \\
-\frac{0}{1}, & -\frac{1}{1}, & -\frac{2}{1}, & -\frac{3}{1}, & \dots \\
\frac{0}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & \dots \\
-\frac{0}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{2}{2}, & -\frac{3}{2}, & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Gib Injektion $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}_0$ an durch Diagonalweg, überspringe dabei rationale Zahlen, die schon mal vorkamen (z.B. $\frac{2}{2}$, wenn $\frac{1}{1}$ schon "abgezählt")

2. Bew.: Jedes $q \in \mathbb{Q}$ ist eindeutig schreibbar als gekürzter Bruch $q = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, mit teilerfremden a und b. Die Abb. $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{gekürzt}} \mapsto (a, b)$ ist injektiv.

Weiter def. $h: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ wie dargestellt: , ist bijektiv

Dann ist $f = h \circ g: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}_0$ ebenfalls injektiv, also ist $\mathbb{Q}$ abzählbar.

Lemma: X abzählbar unendlich $\Leftrightarrow \exists$ bijektive Abb. $g: X \to \mathbb{N}$ [klar]

somit: <u>Lemma:</u> Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$, d.h. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) := \{M \subseteq \mathbb{N}\}$, ist überabzählbar. ["Menge aller Teilmengen M von $\mathbb{N}$"]

<u>Bew.:</u> Es gibt <u>keine</u> bijektive Abb. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, denn:

<u>Lemma von Cantor:</u> X Menge $\Rightarrow$ es gibt <u>keine</u> surjektive Abb. $X \to \mathcal{P}(X)$.

<u>Bew.:</u> Sei $f: X \to \mathcal{P}(X)$ eine Abb. Dann ist f nicht surjektiv:

Es gilt: f ordnet jedem $x \in X$ eine Teilmenge $f(x) \in \mathcal{P}(X)$ zu.

Setze $A := \{x \in X;\ x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$.

Dann hat A kein Urbild unter f, d.h. ex. kein $x \in X$ mit $f(x) = A$. [$\Rightarrow f$ nicht surj.]

Denn:
- Für $x \in A$ ist $x \notin f(x)$, also $f(x) \neq A$ weil $x \in A \setminus f(x)$.
- Für $x \in X \setminus A$ ist $x \in f(x)$, also $f(x) \neq A$

[wäre $f(x) = A$, müsste für $x \in f(x) = A$ dann $x \notin f(x)$ sein, ↯]. □

<u>B. Satz:</u> $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. [Dann auch $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[X]$ usw.]

<u>Bew.:</u> mit dem 2. Cantorschen Diagonalverfahren ["Diagonalargument" im Cantor-Lemma]

Konstruieren injektive Abb. $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ [dann $\mathbb{R}$ überabz'bar, weil $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabz'bar laut Cantor-Lemma] wie folgt:

Ist $A \subseteq \mathbb{N}$, def. charakteristische Fkt. $\chi_A : \mathbb{N} \to \{0,1\},\ j \mapsto \begin{cases} 1, & j \in A \\ 0, & j \notin A \end{cases}$

Def. Fkt. $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto h(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \chi_A(j) \cdot 10^{-j} = 0,\underbrace{\chi_A(1)}\,\underbrace{\chi_A(2)}\ldots$

mit der Dezimaldarstellung einer (eind. best.) reellen Zahl mit 0en und 1en als Nachkommastellen.

- Kgz. der Reihe klar wegen $0 \le h(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j} = 0{,}111\ldots = \frac{1}{9}$, Reihe ist monoton wachsend, also kgt.
- Eind. der Darstellung beweisbar:

$$h(A) = h(B) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \chi_A(j) 10^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_B(j) 10^{-j} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{(\chi_A(j) - \chi_B(j))}_{\in \{-1,0,1\}} \cdot 10^{-j} = 0$$

<u>Ann.:</u> k minimal mit $\chi_A(k) \neq \chi_B(k)$.

Dann: $10^{-k} = |\chi_A(k) - \chi_B(k)| \cdot 10^{-k} = \left|\sum_{j \ge k+1} (\chi_B(j) - \chi_A(j)) \cdot 10^{-j}\right|$,

aber $|\text{r.S.}| \le \sum_{j \ge k+1} 10^{-j} = 10^{-k-1} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 10^{-j} = 10^{-k-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10^{-k-1} \cdot \frac{10}{9} = 10^{-k} \cdot \frac{1}{9}$, ↯

Also sind alle $\chi_A(k) = \chi_B(k)$, also $A = B$. Also ist h injektiv. □