Die Selberg-Klasse

(2-std. Spezialvorlesung im SoSe 2013)

§ 2. Die Riemann-von Mangoldt-Formel I

Wir zeigen die Formel nicht mit Wegintegration, angewandt auf die logarithmische Ableitung, was die klassische Art wäre, sondern nach einer anderen Methode nach Levinson/Steuding.
Dazu einige Vorbereitungen:

Für $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ definiere die Lindelöf-Fkt.

$$\mu_{\mathcal{L}}(\sigma) := \limsup_{t \to \pm\infty} \frac{\log|\mathcal{L}(\sigma+it)|}{\log|t|} = \inf\{\alpha \geq 0 ; |\mathcal{L}(\sigma+it)| \ll |t|^{\alpha}\}.$$

Anschaulich: $\mu_{\mathcal{L}}(\sigma)$ beschreibt Wachstum von $\mathcal{L}$ auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \sigma$ in t-Richtung.
Dann ist $\mu_{\mathcal{L}}(\sigma)$ eine konvexe Funktion in σ (nach Phragmén-Lindelöf-Prinzip).
Mit der abs. Kgz. der definierenden Dirichlet-Reihe folgt $\mu_{\mathcal{L}}(\sigma) = 0$ für $\sigma > 1$.
Das Wachstum von $\mathcal{L}$ links des kritischen Streifens wird von der Funktionalglg. bestimmt, die wir als $\mathcal{L}(s) = \Delta_{\mathcal{L}}(s)\,\overline{\mathcal{L}(1-\bar{s})}$ schreiben,
wobei

$$\Delta_{\mathcal{L}}(s) := \omega\, Q^{1-2s} \prod_{j=1}^{f} \frac{\Gamma(\lambda_j(1-s)+\bar{\mu}_j)}{\Gamma(\lambda_j s + \mu_j)}.$$

Die Stirlingsche Formel $\left(\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} \cdot z^{z-1/2} e^{-z+O(1/|z|)}\right)$ zeigt:

Lemma 2.1: Sei $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$. Für $t \geq 1$ gilt glm. in σ:

$$\Delta_{\mathcal{L}}(\sigma+it) = \left(\lambda Q^2 t^{d_{\mathcal{L}}}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma-it} \exp\left(it d_{\mathcal{L}} + \frac{i\pi}{4}(\mu - d_{\mathcal{L}})\right)\left(\omega + O\left(\tfrac{1}{t}\right)\right),$$

wobei $\mu := 2\sum_{j=1}^{f}(1-2\mu_j)$ und $\lambda := \prod_{j=1}^{f} \lambda_j^{2\lambda_j}$.

Begründung der relevanten t-Potenz, die aus der Stirling-Formel kommt: $\prod_{j=1}^{f} \frac{(1-s)^{\lambda_j(1-s)-1/2}}{s^{\lambda_j s - 1/2}} \simeq \prod_{j=1}^{f} \frac{t^{\lambda_j(1-\sigma)-1/2-\lambda_j it}}{t^{\lambda_j \sigma - 1/2 + \lambda_j it}} = t^{\overbrace{\sum_{j=1}^{f} 2\lambda_j}^{=d_{\mathcal{L}}}(1/2-\sigma-it)}$

Mit dem Phragmén-Lindelöf-Prinzip bekommen wir o.S. für $\mu_{\mathcal{L}}(\sigma)$ mit $0 \le \sigma \le 1$:

Satz 2.2: Sei $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$. Für $|t| \to \infty$ gilt glm. in σ:

$f(t) \asymp g(t)$ $:\Leftrightarrow \exists\, c>0$: $f(-t) \sim c\,g(t)$

$$\mathcal{L}(\sigma+it) \asymp |t|^{(1/2-\sigma)d_{\mathcal{L}}} |\mathcal{L}(1-\sigma+it)|,$$

insb.:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\sigma) \le \begin{cases} 0, & \sigma > 1, \\ \frac{1}{2}(1-\sigma)\, d_{\mathcal{L}}, & 0 \le \sigma \le 1, \\ (\frac{1}{2}-\sigma)\, d_{\mathcal{L}}, & \sigma < 0. \end{cases}$$

Bew.: Die 1. Beh. folgt aus Lemma 2.1 und der Funktionalglg.
Für $\sigma<0$ zeigt dies: $\mu_{\mathcal{L}}(\sigma) = (\frac{1}{2}-\sigma)\, d_{\mathcal{L}}$ (da $\mathcal{L}(1-\sigma+it) \ll 1$ für $\sigma<0$).
Für $0 \le \sigma \le 1$ benutzen wir den Satz von Phragmén-Lindelöf.
(Wg. dem Axiom über die anal. Forts. von $\mathcal{L}$ ist $\mathcal{L}(s)$ eine Fkt. endl. Ordnung.)
Somit zeigt der Satz von P.-L., dass $\mu_{\mathcal{L}}(\sigma)$ konvex ist.
Daher implizieren die Absch. für $\mu_{\mathcal{L}}(\sigma)$ außerhalb des kritischen Streifens diejenige innerhalb. □

Bem.: • Wir haben nicht benutzt, dass die μ_j in den Γ-Faktoren Realteile ≥ 0 haben.
• Der Wert von $\mu_{\mathcal{L}}(\frac{1}{2})$ ist fundamental.
Wir erhalten $\mu_{\mathcal{L}}(\frac{1}{2}) \le \frac{1}{4} d_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow \mathcal{L}(\frac{1}{2}+it) \ll |t|^{d_{\mathcal{L}}/4+\varepsilon}$ für $|t| \ge 1$.

Als nächstes geben wir als Hilfsmittel folgenden Satz von Potter an (o. Bew.):

Satz 2.3: Seien $A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, $B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$ so, dass sie eine Konvergenzhalbebene besitzen, von endl. Ordnung sind, dass all ihre Singularitäten in einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ von endl. Inhalt liegen.
Weiter seien $\sum_{n \le x} |a_n|^2 \ll x^{b+\varepsilon}$ und $\sum_{n \le x} |b_n|^2 \ll x^{b+\varepsilon}$ für $x \to \infty$,
und es gelte

$$A(s) = h(s) \cdot B(1-s) \text{ mit } h(s) \asymp |t|^{c\cdot(a/2-\sigma)} \text{ glm. in } \sigma$$

für σ eines endl. Intervalls (für $|t| \to \infty$), c Konst.

Dann gilt: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |A(\sigma+it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}$

für $\sigma > \max\{\frac{a}{2}, \frac{1}{2}(b+1) - \frac{1}{c}\}$.

Wir wenden diesen Satz auf $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ an und erhalten mit Satz 2.2
(Satz 2.2. zeigt: Vor. für Satz 2.3 ist erfüllt mit $c = d_{\mathcal{L}}$, $a = b = 1$, vgl. $\boxed{1.}$.):

<u>Korollar 2.4:</u> Sei $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$. Für $\sigma > \max\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_{\mathcal{L}}}\}$ gilt:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\mathcal{L}(\sigma+it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}}.$$

Hier kgt. die r.S. aufgrund der Ramanujan-Hypothese.

Jede (kgte.) Dirichlet-Reihe hat eine Halbebene,
in der das Quadrat-Mittel auf vertikalen Geraden beschr. ist (vgl. Satz 0.4).
Wegen Kor. 2.4 enthält diese Halbebene das Gebiet $\sigma > \max\{\frac{1}{2}, \underbrace{1 - \frac{1}{d_{\mathcal{L}}}}_{\leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow d_{\mathcal{L}} \leq 2}\}$.

<u>Vermutung:</u> Erwartet wird, dass das Quadrat-Mittel
für alle $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ für <u>$\sigma > \frac{1}{2}$</u> existiert (wie im Fall von ζ).

$\rightsquigarrow$ Schwierig für große $d_{\mathcal{L}}$, der Satz von Potter ergibt nur Asymptotiken für $\sigma > \frac{1}{2}$,
falls $d_{\mathcal{L}} \leq 2$ ist. Für $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ vom Grad d ist das Problem vergleichbar
zum entsprechenden Ergebnis des $2d$-ten Moments für ζ.