Die Selberg-Klasse

(2-std. Spezialvorlesung im SoSe 2013)

§4. Die Riemann-von Mangoldt-Formel III

Schreiben nun die behandelte c-Stellen-Summe um als

$$\sum_{\beta_c} (\beta_c - b) = \left(\tfrac{1}{2} - b\right) \underbrace{\sum_{\beta_c} 1}_{\text{Anz. c-Stellen}} + \underbrace{\sum_{\beta_c} \left(\beta_c - \tfrac{1}{2}\right)}_{\text{Abst. c-Stellen von Res}=\frac{1}{2}}$$

Sei $N^c(T) := \#\{s = \beta_c + i\gamma_c \in \mathbb{C};\ \mathcal{L}(s) = c,\ T < \gamma_c \leq 2T\}$,
subtrahiere Formel in Satz 3.2 für $b+1$ von der mit b, erhalten so $N^c(T)$, also:

Korollar 4.1: Sei $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$, $c \neq 1$. Dann: $N^c(T) = \frac{d_{\mathcal{L}}}{2\pi} T \log \frac{4T}{e} + \frac{T}{2\pi} \log(\lambda Q^2) + O(\log T)$.

Korollar 4.2: Sei $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$, $c \neq 1$. Dann: $\sum_{T < \gamma_c \leq 2T} \left(\beta_c - \frac{1}{2}\right) = -\frac{T}{2\pi} \log|1-c| + O(\log T)$.

Für c mit $|1-c| \neq 1$ sind die c-Werte gewichtet mit Abstand zur krit. Geraden, asymmetrisch verteilt (beachte, daß ja $\mu_{\mathcal{L}}(\sigma)$ wächst für $\sigma \to -\infty$).
Wollen nun weiterhin zeigen, daß die meisten c-Stellen nahe der krit. Geraden liegen.
Müssen dafür aber die Lindelöf-Vermutung annehmen!
Def. nun die Zählfunktionen

$$N_+^c(\sigma, T) := \#\{\varrho_c;\ T < \gamma_c \leq 2T,\ \beta_c > \sigma\},$$

$$N_-^c(\sigma, T) := \#\{\varrho_c;\ T < \gamma_c \leq 2T,\ \beta_c < \sigma\}.$$

Dann gilt:

Satz 4.3: Sei $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$, $c \neq 1$. Für $\sigma > \max\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_{\mathcal{L}}}\}$ ist dann $N_+^c(\sigma, T) \ll T$, und unter Ann. der Lindelöf-Vermutung gilt für alle $\delta > 0$:

$$N_-^c\left(\tfrac{1}{2} - \delta, T\right) + N_+^c\left(\tfrac{1}{2} + \delta, T\right) \ll \delta T \log T.$$

<u>Beweis:</u> Sei $\sigma > \max\{\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{d_L}\}$ und $\sigma_1 \in]\max\{\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{d_L}\}, \sigma[$ fest.

Dann ist

$$\lceil \beta_c - \sigma_1 \ge \sigma - \sigma_1 \rfloor$$

$$N_+^c(\sigma, T) \le \frac{1}{\sigma-\sigma_1} \underbrace{\sum_{\substack{\beta_c > \sigma \\ T < \gamma_c \le 2T}} (\beta_c - \sigma_1)}_{\le \sum_{\substack{\beta_c > \sigma_1 \\ T < \gamma_c \le 2T}} (\beta_c - \sigma_1) \ll \int_T^{2T} \log|\ell(\sigma_1+it)|\,dt + O(\log T),}$$

nach <u>Littlewood's Lemma</u> wie in §3.

Mit der Formel für I_1 im vorigem §3 erhalten wir $\ll T$.

Ist die <u>Lindelöf-Vermutung</u> wahr, erhalten wir analog

$$N_+^c(\tfrac{1}{2}+\delta, T) \ll \frac{\varepsilon}{\delta} T \log T \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Betrachte nun N_-^c, insb. nehmen wir die <u>Lindelöf-Vermutung</u> für $\mathcal{L}(s)$ an.

Ist b hinr. groß, haben wir

$$\sum_{\substack{\beta_c \ge \frac{1}{2}-\delta \\ T<\gamma_c \le 2T}} (\beta_c - b) \le (\tfrac{1}{2} - b) \sum_{\substack{\beta_c \ge \frac{1}{2}-\delta \\ T<\gamma_c\le 2T}} 1 + \sum_{\substack{\beta_c \ge \frac{1}{2} \\ T<\gamma_c \le 2T}} (\beta_c - \tfrac{1}{2}).$$

(negative Terme weglassen)

Somit ist

$$\sum_{T<\gamma_c\le 2T} (\beta_c - b) = \sum_{\substack{\beta_c < \frac{1}{2}-\delta \\ T<\gamma_c\le 2T}} (\tfrac{1}{2} - b + \beta_c - \tfrac{1}{2}) + \sum_{\substack{\beta_c \ge \frac{1}{2}-\delta \\ T<\gamma_c\le 2T}} (\beta_c - b)$$

$$\le (\tfrac{1}{2} - b) N^c(T) + \sum_{\substack{\beta_c < \frac{1}{2}-\delta \\ T<\gamma_c\le 2T}} \underbrace{(\beta_c - \tfrac{1}{2})}_{<-\delta} + \underbrace{\sum_{\substack{\beta_c > \frac{1}{2} \\ T<\gamma_c\le 2T}} (\beta_c - \tfrac{1}{2})}_{\ll \varepsilon T \log T \text{ nach } \underline{\text{Satz 3.1}} \text{ mit Lindelöf}},$$

also

$$-\delta N_-^c(\tfrac{1}{2}-\delta, T) \ge \sum_{T<\gamma_c\le 2T} (\beta_c - b) - (\tfrac{1}{2} - b) N^c(T) + O(\varepsilon T \log T). \qquad |:(-\delta)$$

Mit <u>Satz 3.2</u> und <u>Korollar 4.1</u> folgt $N_-^c(\frac{1}{2}-\delta, T) \ll \frac{\varepsilon}{\delta} T \log T$, und $\varepsilon = \delta^2$ zeigt die Beh. □

Vgl. von <u>Kor. 4.1</u> und <u>Satz 4.3</u> zeigt unter Ann. der <u>Lindelöf-Vermutung</u>, daß $N_-^c(\frac{1}{2}-\varepsilon, T) + N_+^c(\frac{1}{2}+\varepsilon, T) \ll \varepsilon N^c(T)$,
also sind die c-Stellen für jedes c um die kritische Gerade herum verteilt.

Nun sei $N_{\mathcal{L}}^c(\sigma,T)$ die Anz. c-Stellen $\varrho_c=\beta_c+i\gamma_c$ von $\mathcal{L}(s)$ mit $\sigma\le\beta_c\le 1$, $|\gamma_c|\le T$. Korollar 4.1 mit $2^{-m}T, m\in\mathbb{N}$, statt T liefert für festes $\sigma\le 0$, daß

$$N_{\mathcal{L}}^c(\sigma,T)=2\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{N}^c(\sigma,2^{-m}T)=\left(\frac{d_{\mathcal{L}}}{\pi}T\log\frac{T}{e}+\frac{T}{\pi}\log(\lambda Q^2)\right)\cdot\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}}_{=1}$$

② $O(\log T)$ ok? →

$$+\frac{d_{\mathcal{L}}}{\pi}T\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log 4-m\log 2}{2^m}}_{=0\ \left[\text{da }\sum_m \frac{m}{2^m}=2\right]}+O(\log T).$$

Haben so:

Satz 4.4: Sei $\mathcal{L}\in\mathcal{S}$. Für $\sigma\le 0$ und komplexes $c\ne 1$ ist

$$N_{\mathcal{L}}^c(\sigma,T)=\frac{d_{\mathcal{L}}}{\pi}T\log\frac{T}{e}+\frac{T}{\pi}\log(\lambda Q^2)+O(\log T).$$

Der Fall $c=\sigma=0$ ist gerade die Riemann-von Mangoldt-Formel.

Bem.:

Im Ausnahmefall $c=1$ betr. $\ell(s)=\frac{q^s}{a(q)}(\mathcal{L}(s)-1)$, wo $q\in\mathbb{N}_{>1}$ minimal mit $a(q)\ne 0$.
Dann erhält man ähnliche Aussagen.

Einige ähnliche Ergebnisse von Selberg

Selberg zeigte:

RH $\Rightarrow$ Für $c\ne 1$ gilt

$$\sum_{\substack{\beta_c>\frac12\\ 0<\gamma_c<T}}\left(\beta_c-\frac12\right)=\frac{\sqrt{n_{\mathcal{L}}}}{4\pi^{3/2}}T\sqrt{\log\log T}+\frac{T}{4\pi}\log\left(\frac{|c|}{1-|c|^2}\right)+O\left(T\frac{(\log\log\log T)^3}{\sqrt{\log\log T}}\right),$$

wo $n_{\mathcal{L}}$ die Konstante aus Vermutung (A) ist (vgl. §5).

Für $\sigma(T):=\frac12-\nu\cdot\frac{\sqrt{\log\log T}}{\log T}$, $\xi:=\frac{d_{\mathcal{L}}\nu}{2\sqrt{\pi n_{\mathcal{L}}}}$ mit $\nu>0$ bewies Selberg:

Es gilt:

$$\sum_{\substack{\beta_c > \sigma(T) \\ 0<\gamma_c<T}} (\beta_c - \sigma(T)) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n_\mathcal{L}}{\pi}} \cdot \left(\frac{\exp(-\pi\xi^2)}{2\pi} + \xi - \xi \int_\xi^\infty \exp(-\pi x^2)\,dx \right) T \sqrt{\log\log T}$$
$$+ \left(\log|c| \int_\xi^\infty \exp(-\pi x^2)\,dx - \log|1-c| \right) \frac{T}{2\pi} + O\left(T \frac{(\log\log\log T)^3}{\sqrt{\log\log T}} \right).$$

Aus diesen Ergebnissen schloß Selberg, daß etwa die Hälfte der c-Stellen links der kritischen Geraden liegen, und jenseits davon statistisch gut verteilt sind in Abständen der Ordnung $\frac{\sqrt{\log\log T}}{\log T}$ von $\sigma = \frac{1}{2}$,
und daß

$$N_\mathcal{L}^c(\sigma(T), T) \sim N_\mathcal{L}^c(T) \int_{-\xi}^\infty \exp(-\pi x^2)\,dx.$$

Die meisten der anderen c-Stellen liegen eher nahe der kritischen Nst.

in Abständen der Ordnung $\leq \frac{(\log\log\log T)^3}{\log T \sqrt{\log\log T}}$.