Die Selberg-Klasse

(2-std. Spezialvorlesung im SoSe 2013)

§6. Primitivität und die Selberg-Vermutungen II

Unter Ann. der RH kann die Verteilung aufeinanderfolgender Nst. $\frac{1}{2}+i\gamma, \frac{1}{2}+i\gamma'$ von ζ studiert werden (im Gegensatz zur RH also die "vertikale" Verteilung der Nst.):

Montgomerys Paarkorrelationsvermutung (PCC):
Für feste α, β mit $0<\alpha<\beta$ gilt

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{N(T)} \#\left\{0<\gamma,\gamma'<T;\ \alpha \le \frac{\gamma-\gamma'}{2\pi}\log T \le \beta\right\} = \underbrace{\int_\alpha^\beta \left(1-\left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right) du}_{=:(*)}.$$

Diese Vermutung hat einige wichtige Konsequenzen,
u.a., daß fast alle Nst. von ζ einfach sind.
Dyson bemerkte, daß die Fkt. $(*)$ die Paarkorrelationsfkt. der Eigenwerte großer hermitescher Zufallsmatrizen ist, speziell in der Gaußschen Unitaritätsmenge (GUE).
Dies unterstützt einen Ansatz von Hilbert bzw. Pólya, die einen selbstadjungierten Hermiteschen Operator gesucht haben, dessen Eigenwerte identisch sind mit den Imaginärteilen der Nst. ϱ von ζ.
Die Selbstadjungiertheit impliziert dann, daß diese alle $\in \mathbb{R}$ sind, also die $\varrho-\frac{1}{2} \in i\mathbb{R}$, es folgt so die RH.
Nicht nur durch numerische Daten wird diese Idee unterstützt.
Z.B. zeigten Keating & Snaith, daß gewisse Zufallsmatrizenmengen gewisserweise denselben Wertdistributionen wie die von ζ auf $\sigma=\frac{1}{2}$ unterliegen, die durch Selbergs Grenzwertsatz (s. Ende von §4) vorhergesagt werden.

"circular unitary ensemble"

Für charakteristische Polynome $Z_N(\theta, U)$ der CUE $\mathcal{U}(N)$ zeigten K.&S. den Grenzwertsatz

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{meas}\left\{U \in \mathcal{U}(N);\ \frac{\log Z_N(\theta,U)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log N}} \in \mathcal{R}\right\} = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathcal{R}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right)dx\,dy,$$

wobei $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ ein beliebiges Rechteck mit Kanten parallel der Re- und Im-Achse ist.

Für die ζ-Fkt. gibt es nach Selberg|Joyner dieselbe Gaußsche Normalverteilung:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left\{t \in [T, 2T];\ \frac{\log \zeta(\frac{1}{2}+it)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}} \in \mathcal{R}\right\} = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathcal{R}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right)dx\,dy.$$

Weitere Evidenz für die PCC wurden von Rudnick & Sarnak entdeckt: Normalisiert man γ_n in der geordneten Nst.folge $\varsigma_n = \frac{1}{2} + i\gamma_n$ durch $\tilde{\gamma}_n := \frac{\gamma_n}{2\pi}\log|\gamma_n|$, dann folgt mit der Riemann-von Mangoldt-Formel, daß die $\tilde{\gamma}_n$ im Schnitt Abstand 1 voneinander haben. ("R-vM-Normalisierung")

- Dann läßt sich die PCC umformulieren zu:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n\le N} f(\tilde{\gamma}_{n+1} - \tilde{\gamma}_n) = \int_0^\infty f(x)P(x)\,dx \quad \text{für jede (geeignete) Fkt. } f \text{ auf } (0,\infty),$$

wobei P die Verteilung aufeinanderfolgender Abstände der EWe einer großen Hermiteschen Zufallsmatrix ist. Das m-dimensionale Analogon dieser Formel konnte für eine große Klasse von Testfunktionen f gezeigt werden.

- Katz & Sarnak konnten das Analog der PCC für Funktionenkörper zeigen, ohne Annahme unbewiesener Vermutungen (oAuV).

- Murty & Perelli erweiterten die PCC auf die Selberg-Klasse $\mathcal{S}$: Betr. dazu $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathcal{S}$, beide primitiv.

Um die Nst. $\frac{1}{2} + i\gamma_{\mathcal{L}_1}$ von $\mathcal{L}_1$ mit den Nst. $\frac{1}{2}+i\gamma_{\mathcal{L}_2}$ von $\mathcal{L}_2$ zu vergleichen (also unter Ann. der GRH für $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$), def.

$$F(\alpha; \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) := \frac{\pi}{d_{\mathcal{L}_1} T \log T} \sum_{-T<\gamma_{\mathcal{L}_1}, \gamma_{\mathcal{L}_2} \le T} T^{i\alpha d_{\mathcal{L}_1}(\gamma_{\mathcal{L}_1} - \gamma_{\mathcal{L}_2})}\, w(\gamma_{\mathcal{L}_1} - \gamma_{\mathcal{L}_2}),$$

mit geeigneter Gewichtsfkt. w.

Die Funktion $\mathcal{F}(\alpha;\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2)$ heißt <u>Paarkorrelationsfunktion</u>.

Die PCC für $\mathcal{S}$ ist dann folgende:

<u>Paarkorrelationsvermutung für $\mathcal{S}$:</u>
Seien $\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2 \in \mathcal{S}$ primitiv. Unter Ann. der GRH gilt glm. in α, wenn $T\to\infty$:

$$\mathcal{F}(\alpha;\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) \sim \begin{cases} \delta_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}\cdot|\alpha| + d_{\mathcal{L}_1} T^{-2|\alpha| d_{\mathcal{L}_1}} \log T\cdot(1+o(1)), & |\alpha|<1, \\ \delta_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}\cdot|\alpha|, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei $\delta_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2} := \begin{cases} 1, & \mathcal{L}_1=\mathcal{L}_2, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$ das Kroneckersymbol bezeichnet.

Diese allgemeine PCC beinhaltet Montgomerys PCC für ζ.
Sie hat viele wichtige Anwendungen, z.B. folgt die Artinsche Vermutung (vgl. §10) aus ihr. (Wir zeigen in §10, daß die Artinsche Vermutung auch aus der Selberg-Vermutung (B) folgt; s. Satz 10.2.)

Weiter impliziert sie, daß fast alle Nst. zweier primitiver $\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2\in\mathcal{S}$ einfach (und verschieden) sind.
Gilt die PCC für mindestens ein α, so hat $\mathcal{S}$ außerdem eine eindeutige Faktorisierung in primitive Funktionen.

Weiter gilt (Murty & Perelli):
<u>Satz 6.1:</u> Die GRH und die PCC implizieren die Selberg-Vermutungen.