Seminar elementare Primzahltheorie und Teilerstatistik
* Themenliste *

K. Halupczok

Math. Institut, WWU Münster, Sommersemester 2016

Mi. 14:00 Uhr ct bis 16:00 Uhr, Raum: SR 1C, erste Sitzung am 13. April 2016

Vorbesprechung und Themenvergabe: Fr. 12.2.2016, 10:00 Uhr st,
Treffpunkt Raum 113 (zwischen SR 1C und SR 1D)

Kontakt: karin.halupczok@uni-muenster.de
Büro: Raum 113, Tel. 83-32732

Assistenz: Dipl.-Math. A. Juhas

Email: arne.lutz.juhas@uni-muenster.de Büro: Raum 319, Tel. 83-33709

Inhaltsverzeichnis

Inhalte

Im ersten Teil des Seminars behandeln wir zahlentheoretische Funktionen und Themen der elementaren Primzahltheorie, insbesondere den Satz von Tschebyschev. Dies führt uns auf zwei Vermutungen von Hardy und Littlewood, deren Inkompatibilität wir beweisen werden (auch bekannt als Satz von Hensley und Richards). Im zweiten Teil behandeln wir Fragen der Teilerstatistik, etwa die Frage, wie viele Teiler, Primteiler und Primfaktoren eine natürliche Zahl im Mittel hat, sowie die Häufigkeit glatter Zahlen, die nur aus kleinen Primfaktoren zusammengesetzt sind bzw. stark zusammengesetzt sind. Vorausgesetzt werden nur Grundkenntnisse der elementaren Zahlentheorie (Rechnen mit Kongruenzen, Chinesischer Restsatz, Primzahlen und der Hauptsatz der Arithmetik, d. h. der Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$). In einem ersten vorbereitenden Vortrag werden diese Grundlagen vorgestellt.

Zum Nachschlagen einzelner, spezieller Themen/Fragen sind die Skripte [3] und [7] manchmal nützlich.

Allgemeine Bemerkungen

Teil 1 behandelt die Grundzüge der elementaren Primzahltheorie in den Vorträgen 1–7, dann Teil 2 die Grundzüge der zahlentheoretischen Funktionen in den Vorträgen 8–13. Der weitere Stoff verwendet dann immer wieder diese Ergebnisse, die zu Beginn von Teil 1 und Teil 2 vorgestellt werden, und zeigt dabei Anwendungen auf.

Die Stichpunktlisten hier geben an, welche Themen im Seminarvortrag *mindestens* vorgestellt werden sollen. In jedem Fall ist aber eine Absprache nötig, wie der Umfang sinnvollerweise aussehen soll, u.U. muss auch gekürzt werden.

Deswegen: Melden Sie sich unbedingt spätestens eine Woche vor dem Vortragstermin zum Absprechen mit dem Seminarassistenten/mit mir! Idealerweise bringen Sie zu dem Termin schon erste handschriftliche Ausarbeitungen mit!

Am 20.07.2016 findet dann in lockerer Runde eine Seminar-Nachbesprechung zum Seminartermin statt.

Themenliste

1 Zahlentheorie-Vorbereitungen

13.04.2016: Zahlentheoretische Grundlagen

Literatur: Auswahl von [3]: In Kap. 1: 1.1 – 1.7, 1.9(2) (für Fundamentalsatz), 1.13–1.17, in Kap. 2: 2.1 – 2.4 mit Beispielen, Satz 3.3 (CRS). Treffen Sie hier selbst die richtige Auswahl, um Folgendes vorzustellen:

- Ganze Zahlen, Teiler, Primzahlen, Unendlichkeit von $\mathbb{P}$ beweisen (Wahl eines Beweises von $\#\mathbb{P} = \infty$ nach Geschmack)
- Sieb des Eratosthenes
- Fundamentalsatz der Arithmetik, beweisen
- einfaches Kongruenzenrechnen, Definition Restklasse
- Chinesischen Restsatz beweisen, Beispiele (selbst didaktisch geeignete Beispiele suchen!)

2 Elementare Primzahltheorie 1

20.04.2016: Erste Einführung in die Theorie der Primzahlzählfunktion

Literatur: Auswahl von Kapitel 3.4 aus [1], s. auch [6] und [3]

- Primzahlen und die Primzahlzählfunktion π mit Varianten: Def. 3.39 S. 79
- Der Satz von Tschebyschev mit Beweis: S. 78–84 [1], Ziel ist Cor. 3.45
- Bertrands Postulat (Cor. 3.44 S. 84) und Abschätzung der n-ten Primzahl (Cor. 3.47, S.85/86)

3 Elementare Primzahltheorie 2

27.04.2016: Wesentliches zur Theorie der Primzahlzählfunktion

Literatur: Auswahl von Kapitel 3.4 aus [1], zur Ergänzung s. auch Lehrerfortbildungsvortrag auf `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/karin.halupczok/Folien_PZMuster.pdf`

- Die Ergebnisse von Rosser und Schoenfeld (S.144/145)
- Landau-Symbolik ([1] S. xiv: O, $\sim$, $\ll$, auch in [3] nachsehen S. 90/91)
- Vergleich $x/\log x$ und $\mathrm{li}(x)$ und $x/(\log x - 1)$
- Nenne: Primzahlsatz (PZS S. 81) und die Riemannsche Vermutung in der Form $\pi(x) - \mathrm{li}(x) \ll \sqrt{x}\log x$
- historische Bemerkungen S. 146/147

4 Elementare Primzahltheorie 3

04.05.2016: Die Sätze von Mertens, ein Satz von Tschebyschev zum PZS

Literatur: Satz 6.6 S. 109 [3]

- partielle Summation: Theorem 1.14 auf S. 8–9 [1] mit Beweis
- Zum Satz von Mertens, insbesondere Produktversion mit Konstanten, dass diese $= e^\gamma$ ist in Vortrag 6 nicht nötig zu wissen, nur nennen: [3] S. 104/105, und [4] S. 165
- Anwendung von Mertens-Sätzen ist ein Satz von Tschebyschev: Konstante $= 1$ (PZS) falls GW existiert ([3] S. 109/110, Satz 6.6)

5 Der Satz von Hensley und Richards, Teil 1

11.05.2016: Zwei bekannte Vermutungen von Hardy und Littlewood sind inkompatibel

Literatur: Originalarbeit [5] und eigene Notizen

- Zwei Vermutungen von Hardy-Littlewood über Primzahlmuster und Primzahlen in Intervallen
- Umriss der Beweisidee mittels zahlentheoretischen Hilfsfunktionen

6 Der Satz von Hensley und Richards, Teil 2

25.05.2016: Konstruktion einer zulässigen Menge in einem kurzen Intervall, die hinreichend viele Elemente hat

Literatur: Originalarbeit [5] und eigene Notizen

- Reduktion auf ein konstruktives Problem: Lemma 2
- vorbereitende Lemmata 3,4: Abschätzungen der Hilfsfunktionen (mit Chinesischem Restsatz, Sieb des Eratosthenes, Satz von Mertens und dem Primzahlsatz)

7 Der Satz von Hensley und Richards, Teil 3

01.06.2016: Beweisschluss

Literatur: Originalarbeit [5] und eigene Notizen

- Lemma 5 beweisen durch Kombination von Lemma 3 und 4
- Schluss des Beweises: Beweis von Lemma 2
- Ergänzende historische Hinweise (z.B. Green/Tao/Ziegler, Zhang)

Überleitung zu Teil 2: Im Beweis des Satzes von Hensley und Richards wurden immer wieder für den Beweis zugeschnittene zahlentheoretische Funktionen benutzt. Wir werden die Theorie solcher Funktionen im Teil 2 genauer studieren und einige Anwendungen bzw. Beispiele aufzeigen.

8 Zahlentheoretische Funktionen 1

08.06.2016: Erste Einführung in die Theorie der zahlentheoretischen Funktionen

Literatur: Auswahl des Skripts [3]

- Definition: Multiplikative und additive zahlentheoretische Funktionen, S. 77–79, Def. τ, ω, Ω
- Die Möbiusfunktion S. 81, Eigensch. und das Faltprodukt S. 82–84
- Noch mehr Beispiele für interessante Faltungsidentitäten? Absprechen mit Vortrag 9.
- die Möbiusschen Umkehrformeln S. 85–86

9 Zahlentheoretische Funktionen 2

15.06.2016: Einführung in die Theorie der zahlentheoretischen Funktionen

Literatur: Auswahl des Skripts [3], ExtraBlatt

- Faltungsidentitäten: insb. Beispiel zur Möbiusschen Umkehrformel S. 87–88
- Anwendung: φ und die Anzahl sichtbarer Gitterpunkte S. 95–98
- Beweis für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$: ExtraBlatt

10 Teilerstatistik

22.06.2016: Bestimmung der Mittelwerte prominenter zahlentheoretischer Funktionen

Literatur: Auswahl von Kapitel 5 aus [3]

- Die Teileranzahlfunktion τ, die Dirichletsche Hyperbelmethode: [2] ab S.11: Satz 1.2 mit Beweis, oder [3] S. 92–94, s. auch [1] S. 184
- Die Primteileranzahlfunktion ω und die Primfaktorenanzahlfunktion Ω: Mittelwerte und Abweichungen vom Mittelwert sowie Ergebnisse von Hardy und Ramanujan [3] S. 105–108
- Historisches zu Hardy und Ramanujan?

11 Glatte Zahlen 1

29.06.2016: Glatte Zahlen

Literatur: Auswahl von Kapitel 9 aus [6]

- Der kleinste und größte Primfaktor einer natürlichen Zahl, Vorstellung/Definition von P, p, Ψ S. 127 und S.132 oben
- Mittelwerte für p ("(9.11)") und P, S. 132–133
- Glatte Zahlen und ihre Häufigkeit: erste Formeln für Ψ S. 133/134

12 Glatte Zahlen 2

06.07.2016: Die Dickman-de Bruijn-Funktion

Literatur: Auswahl von Kapitel 9 aus [6], aber noch Auswahl treffen, welche Anwendungen (ev. nur nennen):

- Glatte Zahlen und die Dickman-de Bruijn-Funktion ρ, Thm. 9.3/94 S. 134 –137, S. 147/148
- Beispiele für Anwendungen: Problem 9.22, S. 346, 146
- Basis-2-Pseudoprimzahlen S. 141–145 bis Prop. 9.11
- Aufeinanderfolgende glatte Zahlen S. 149/150

13 Stark zusammengesetzte Zahlen

13.07.2016: Der Kompositionsindex als Maß für stark zusammengesetzte Zahlen

Literatur: Auswahl von Kapitel 16 aus [6]

- Der Kompositionsindex λ einer natürlichen Zahl: S. 267/268
- stark zusammengesetzte Zahlen, Beispiele
- Satz S. 401
- Der Mittelwert von λ und $1/\lambda$ S. 270/272–274

Literatur

[1] Olivier Bordellès: Arithmetic Tales, Universitext Springer Verlag.

[2] Brüdern, Einführung in die analytische Zahlentheorie, Springer Lehrbuch.

[3] K. Halupczok, Manuskript zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie, Sommersemester 2009 (Freiburg), `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/karin.halupczok/ElZthSS2009Skript.pdf`

[4] Nathanson, Additive Number Theory. The Classical Bases. Springer Verlag.

[5] Douglas Hensley and Ian Richards: Primes in intervals. Acta Arith. 25 (1973/74), 375–391.

[6] Jean-Marie de Koninck and Florian Luca: Analytic Number Theory—Exploring the Anatomy of Integers, Graduate Studies in Mathematics Vol. 134, AMS.

[7] F. Lorenz, Manuskript zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie, Sommersemester 2012 (Münster), `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/karin.halupczok/elZTSoSe13.html`, oder das neuere Skript auf `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/karin.halupczok/elZTWiSe14/`