

Abgabe: Donnerstag, 21. April 2016, bis 08:30 Uhr in den jeweiligen Briefkasten im Hörsaalgebäude (Briefkastennummer der angemeldeten Übungsgruppe s. Internetseite der Übungen)

**Leseaufgabe:** Kapitel 1.2 bis Montag 18.4., Kapitel 1.3 bis Donnerstag 21.4.

### Aufgabe 1

Es seien  $a, m, s, t \in \mathbb{N}$  mit  $m > 1$ . Zeigen Sie:

- (i) Die Zahl  $a^{st} - 1$  ist durch  $a^t - 1$  teilbar.
- (ii) Ist  $a^m - 1$  eine Primzahl, so auch  $m$  und es ist  $a = 2$ .

Die Zahlen  $M_p = 2^p - 1$ ,  $p$  Primzahl, heißen *Mersennesche Zahlen*.

Die zur Zeit größte numerisch bekannte Primzahl ist  $M_{74207281}$  (Entdeckung durch C. Cooper bzw. GIMPS vom 7.1.2016). Berechnen Sie die Anzahl der Dezimalstellen dieser Zahl.

### Aufgabe 2

Die natürliche Zahl  $R_n = \sum_{m=0}^{n-1} 10^m$  heißt *n-te Repetier-Eins*. Zeigen Sie:

- (a) Aus  $n \mid m$  folgt  $R_n \mid R_m$ . (Hinweis: Aufgabe 1 (a).)
- (b) Aus  $d \mid R_n$  und  $d \mid R_m$  folgt  $d \mid R_{n+m}$ . (Hinweis: Zeigen Sie erst  $R_{n+m} = R_n 10^m + R_m$ .)
- (c) Es gilt  $(R_n, R_m) = 1$  genau dann, wenn  $(n, m) = 1$ .

### Aufgabe 3

Eine ganze Zahl  $n$  heißt *quadratreie Zahl*, wenn sie sich nicht durch das Quadrat einer anderen Zahl  $> 1$  teilen lässt. Zeigen Sie, dass

- (a) eine natürliche Zahl  $n > 1$  genau dann quadratfrei ist, wenn sie in ein Produkt verschiedener Primzahlen zerlegt werden kann,
- (b) jede natürliche Zahl  $n > 1$  das Produkt aus einer quadratfreien Zahl und einer Quadratzahl ist.