

Abgabe: Donnerstag, 28. April 2016, bis 08:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Leseaufgabe: Kapitel 1.4 bis Montag 25.4., Kapitel 1.5 bis Donnerstag 28.4.

Aufgabe 1

Für die Eulersche φ -Funktion zeige man:

- (a) Aus $a \mid b$ folgt $\varphi(a) \mid \varphi(b)$.
- (b) Aus $(m, n) = d$ folgt $\varphi(mn)\varphi(d) = d\varphi(m)\varphi(n)$.
- (c) Für jedes n gibt es ein a mit $\varphi(a) = n!$ (Tipp nach Erdős: $\prod_{p \leq n} (p-1) \mid n!$).

Aufgabe 2

- (a) Berechnen Sie die Endziffer der Zahl 3^{18} und den kleinsten nichtnegativen Rest von 3^{201} bei Division durch 11.
- (b) Berechnen Sie ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $163x + 261y = 1$.
- (c) Bestimmen Sie die zu $\overline{163}$ inverse Restklasse in $\mathbb{Z}/261\mathbb{Z}$, falls existent.
- (d) Lösen Sie die Kongruenz $163x + 5 \equiv 18 \pmod{261}$ in \mathbb{Z} .

Aufgabe 3

- (a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv 4 \pmod{25}$, $x \equiv 2 \pmod{64}$, $x \equiv 3 \pmod{59}$.
- (b) Ein Ei wiegt 55 g, ein Esslöffel Mehl 10 g, ein Esslöffel Zucker und Butter je 15 g. Es soll ein Rührteig hergestellt werden, der aus gleichen Teilen Eier, Mehl, Zucker und Butter besteht. Es ist noch ein Eigelb (20 g) und ein halbes Päckchen Backpulver übrig, die mitverwendet werden sollen; ein Päckchen Backpulver reicht für 500 g Mehl. Wie lässt sich mit diesen Angaben ein Rührteig abmessen? Dabei sind nur ganzzahlig viele zusätzliche Eier, ganze zusätzliche Backpulverpäckchen und ganzzahlig viele Esslöffel Mehl, Zucker und Butter erlaubt. Eine Kuchenform fasst gut 1.5 kg Teig. Wieviele Kuchen lassen sich aus dem Rührteig backen?
- (c) Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Für $m \in \mathbb{N}$ bezeichne $\rho(m)$ die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$. Zeigen Sie, dass ρ eine multiplikative Funktion ist, d. h. es gilt $\rho(m_1 m_2) = \rho(m_1)\rho(m_2)$, falls $(m_1, m_2) = 1$ ist.