**Übungen zur Zahlentheorie, WWU Münster, Mathematisches Institut, SoSe 2016**
**U. Hartl, K. Halupczok** **Blatt Nr. 6**, 23.05.16

Abgabe: **Donnerstag, 2. Juni 2016**, bis 8:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

---

**Leseaufgabe:** Kapitel 2.4 bis Montag 30.5. und Kapitel 3.1 bis Donnerstag 2.6.

### Aufgabe 1

Zeigen Sie:

(a) Sei $p > 5$ eine Primzahl, dann ist die Zahl $\operatorname{ord}(\overline{10})$ in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ gleich der Periodenlänge der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{p}$.

(b) Es gibt unendlich viele Primzahlen $p$, so dass 10 quadratischer Rest mod $p$ ist.

(c) Es gibt unendlich viele Primzahlen $p$, so dass die Periodenlänge der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{p}$ höchstens $\frac{p-1}{2}$ beträgt.

### Aufgabe 2

Die bis heute unbewiesene Artinsche Vermutung über Primitivwurzeln besagt: Ist $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq \pm 1$, kein Quadrat, dann existieren unendlich viele Primzahlen $p$, für die $a$ eine primitive Wurzel mod $p$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass diese Artinsche Vermutung eine Verallgemeinerung von Satz 2.3.6 ist, d. h. dass sie Satz 2.3.6 impliziert.

(b) Zeigen Sie unter Annahme der Artinschen Vermutung, dass es unendlich viele Primzahlen $p$ gibt, deren Dezimalentwicklung von $\frac{1}{p}$ die Periodenlänge $p-1$ besitzt.

### Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ und seien $q_1 = 2 < q_2 < \ldots < q_k$ alle Primzahlen $\leq n$ und $p$ eine Primzahl mit $p \equiv 1 \bmod 8q_2 \cdots q_k$. Zeigen Sie: Dann ist jedes $a \leq n$ ein quadratischer Rest mod $p$.

### Aufgabe 4 (zur Klausurvorbereitung)

**4.1** Es ist $\left(\frac{14}{29}\right) =$ _____ . Daher lässt $14^{14}$ bei Division durch 29 den Rest $r =$ _____ .

**4.2** $\operatorname{ord}(\overline{2}) =$ _____ , $\operatorname{ord}(\overline{22}) =$ _____ , $\operatorname{ord}(\overline{5}) =$ _____ in $(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})^\times$

**4.3** Die Primzahlen $p > 3$, für die 3 ein quadratischer Rest mod $p$ ist, sind genau die $p$, welche modulo $m =$ _____ kongruent sind zu _____ .

**4.4** Eine simultane Lösung der Kongruenzen $8x \equiv 23 \bmod 25$ und $x \equiv 4 \bmod 27$ ist $x =$ _____ . Sie ist modulo _____ eindeutig bestimmt.