Übungen zur Zahlentheorie, WWU Münster, Mathematisches Institut, SoSe 2016
U. Hartl, K. Halupczok **Blatt Nr. 8**, 09.06.16

Abgabe: **Donnerstag, 16. Juni 2016**, bis 8:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Leseaufgabe: Kapitel 3.5 bis Montag 13.6. und Kapitel 4.1 bis Donnerstag 16.6.

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 6 \\ -x - 2y &= 2 \end{aligned}$$

modulo jedem $q \in \mathbb{N}$ lösbar ist. Bestimmen Sie auch eine ganzzahlige Lösung, die das Gleichungssystem wegen Satz 3.2.1 besitzen muss.

(b) Man ersetze in obigem Gleichungssystem die 6 durch 5. Zeigen Sie, dass das veränderte Gleichungssystem für unendlich viele Primzahlen p eine Lösung modulo p besitzt und nach Satz 3.2.4 also eine rationale Lösung hat (welche?).

(c) Belegen Sie mit einem Beispiel, dass Satz 3.2.4 für nichtlineare Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}$, d. h. für Systeme diophantischer Gleichungen mit Polynomen, nicht richtig ist.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^3 - 10$, welche auf dem Intervall $[1, 3]$ eine reelle Nullstelle hat. Wählen Sie einen geeigneten Startwert x_0 für das Newton-Verfahren und berechnen Sie die reelle Nullstelle von f auf 9 Dezimalstellen genau. Bis zu welchem Schritt k müssen Sie das Verfahren dafür durchführen?

Aufgabe 3

(a) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^3 - 10$, und bestimmen Sie eine Nullstelle mod 3^n für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

(b) Berechnen Sie die beiden Lösungen von $x^2 \equiv -1 \bmod 13^n$ für $n = 1, 2, 3, 4$.

Aufgabe 4 (zur Klausurvorbereitung)

4.1 Wegen $111 =$ ________ ist $\varphi(111^2)/111 =$ ________

4.2 Die Primzahlen $p > 3$, für welche die Gleichung $x^2 + 3 = py$ lösbar ist mit $x, y \in \mathbb{Z}$, sind genau die p, welche die Kongruenz ________ erfüllen.

4.3 Der Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ hat für $n = 111^2$ genau ______ Einheiten und genau ______ Nullteiler.

4.4 Die Kongruenz $r^2 \equiv -1 \bmod 29$ hat genau die beiden Lösungen ________ mod 29.

bitte wenden

Exkurs (zu Teilbarkeitsregeln)

Es sei $n = a_m 10^m + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0 = [a_m a_{m-1} \ldots a_2 a_1 a_0]$ die Darstellung der natürlichen Zahl n im Dezimalsystem (die $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$); mit s_n werde ihre Quersumme $\sum a_i$ und mit t_n die alternierende Quersumme $\sum (-1)^i a_i$ bezeichnet. Dann gilt:

(a) $n \equiv 0 \bmod 10 \Leftrightarrow a_0 = 0$, da $n \equiv a_0 \bmod 10$

(b) $n \equiv 0 \bmod 2 \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \bmod 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$

(c) $n \equiv 0 \bmod 5 \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \bmod 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0, 5\}$

(d) $n \equiv 0 \bmod 25 \Leftrightarrow [a_1 a_0] \equiv 0 \bmod 25$, da $n \equiv [a_1 a_0] \bmod 100$

(e) $n \equiv 0 \bmod 4 \Leftrightarrow [a_1 a_0] \equiv 0 \bmod 4$

(f) $n \equiv 0 \bmod 125 \Leftrightarrow [a_2 a_1 a_0] \equiv 0 \bmod 125$, da $n \equiv [a_2 a_1 a_0] \bmod 1000$

(g) $n \equiv 0 \bmod 8 \Leftrightarrow [a_2 a_1 a_0] \equiv 0 \bmod 8$

(h) $n \equiv 0 \bmod 9 \Leftrightarrow s_n \equiv 0 \bmod 9$, da $n \equiv s_n \bmod 9$

(i) $n \equiv 0 \bmod 3 \Leftrightarrow s_n \equiv 0 \bmod 3$

(j) $n \equiv 0 \bmod 11 \Leftrightarrow t_n \equiv 0 \bmod 11$, da $n \equiv t_n \bmod 11$

(k) Sei $v_n = [a_2 a_1 a_0] - [a_5 a_4 a_3] + [a_8 a_7 a_6] - \ldots$ Da $n \equiv v_n \bmod 1001$ und $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, folgt für $k \mid 1001$: $n \equiv 0 \bmod k \Leftrightarrow v_n \equiv 0 \bmod k$

(l) Für $n = [abc]$ gilt: $n \equiv 0 \bmod 7 \Leftrightarrow 2a + 3b + c \equiv 0 \bmod 7$

(m) Für $n = [abc]$ gilt: $n \equiv 0 \bmod 13 \Leftrightarrow 4a + 3b - c \equiv 0 \bmod 13$

(n) Formulieren Sie eine Teilbarkeitsregel für 101 (ist prim, warum?).

(o) Formulieren Sie eine Teilbarkeitsregel für 17 unter Ausnutzung von $17 \mid 1003$ und $17 \mid 102$. Inwiefern könnte $17 \mid 10^8 + 1$ nützlich sein?

(p) Wie könnte eine Teilbarkeitsregel für 19 gefunden werden?