Abgabe: **Donnerstag, 23. Juni 2016**, bis 8:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Leseaufgabe: Kapitel 4.2 bis Montag 20.6. und Kapitel 4.3 bis Donnerstag 23.6.

Aufgabe 1

(a) Begründen Sie, warum die Gleichung

$$\frac{1}{r^4} - \frac{17}{s^4} = \frac{2}{t^2}$$

kein Lösungstripel $(r, s, t) \in (\mathbb{Q} \setminus \{0\})^3$ besitzt.

(b) Sei p prim und $f \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ ein homogenes Polynom, d. h. alle Monome von f haben denselben Grad, und es sei $\operatorname{grad} f < r$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(X_1, \ldots, X_r) = 0$ eine Lösung in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat, die $\neq (0, \ldots, 0)$ ist.

(c) Sei p prim. Begründen Sie, warum die Gleichung

$$\frac{1}{abcd} - \frac{17}{tuvw} = \frac{2}{r^2 s^2}$$

Lösungstupel in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{10}$ besitzt, welche von $(0, \ldots, 0)$ verschieden sind.

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie in den Ringen $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ die durch $\overline{3}$ teilbaren Elemente, die Einheiten und die Nullteiler, die zu $\overline{5}$ assoziierten Elemente, die Primelemente und die irreduziblen Elemente.

(b) Welche Elemente in $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ sind Primelemente, aber nicht irreduzibel? Warum kann es solche Elemente nicht in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ geben? Wie lautet ein $\operatorname{ggT}(\overline{2}, \overline{5})$ in $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$?

Aufgabe 3

(a) Betrachten Sie die additive Gruppe $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass darin die Teilmenge $B = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$ eine Untergruppe bildet.

(b) Zeigen Sie, dass B isomorph zu der additiven Gruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Faktorgruppe A/B isomorph zur additiven Gruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist.

bitte wenden

Aufgabe 4 (zur Klausurvorbereitung)

__4.1__ Es gilt $\left(\frac{1011}{13}\right) =$ ________. Daher hat die Kongruenz $x^2 \equiv 10 \bmod 13$ genau ______ Lösungen mod 13.

__4.2__ Ein lineares Gleichungssystem mit ganzzahligen Koeffizienten besitzt genau dann eine ______________ Lösung, wenn es modulo allen $q \in \mathbb{N}$ lösbar ist. Es besitzt genau dann modulo unendlich vieler Primzahlen Lösungen, wenn es eine ______________ Lösung besitzt.

__4.3__ Es gibt keine ganze Zahlen x, y mit $(4x+1)^2 = 2y^3$, da diese Gleichung modulo ______ keine Lösungen besitzt. Denn Kubikzahlen besitzen modulo ______ genau die Reste ______________.

__4.4__ Die Lösungen x mod 3^3 der Kongruenz $x^3 \equiv 10 \bmod 3^3$, für die $x \equiv 4 \bmod 3^2$ gilt, lauten ______________.