Übungen zur Zahlentheorie, WWU Münster, Mathematisches Institut, SoSe 2016
U. Hartl, K. Halupczok **Blatt Nr. 10**, 23.06.16

Abgabe: **Donnerstag, 30. Juni 2016**, bis 8:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

Leseaufgabe: Kapitel 4.4 und 4.5 bis Montag 27.6. und Kapitel 5.1 bis Donnerstag 30.6.

Aufgabe 1

Sei A ein Ring und I eine Untergruppe (der additiven Gruppe) von A.
Zeigen Sie: Die Multiplikation auf A induziert genau dann die Struktur eines Ringes auf A/I, wenn $I \subset A$ ein Ideal ist.

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegungen von $14 + 6i$ und 30 in $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Berechnen Sie einen $\mathrm{ggT}(13 - i, 8 + 9i)$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus in $\mathbb{Z}[i]$.

(c) Schreiben Sie das Ideal $\{(13 - i)a + (8 + 9i)b;\ a, b \in \mathbb{Z}[i]\}$ in $\mathbb{Z}[i]$ als ein Hauptideal.

Aufgabe 3

(a) Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ der Radius des einem rechtwinkligen Dreiecks einbeschriebenen Inkreises und $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ seine Seitenlängen mit $a^2 + b^2 = c^2$. Zeigen Sie die Beziehung

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc.$$

(b) Ein Dreieck, dessen Seitenlängen durch ein pythagoräisches Tripel gegeben werden, heißt *pythagoräisches Dreieck*. Zeigen Sie, dass der Inkreisradius r eines pythagoräischen Dreiecks stets ganzzahlig ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung aus (a) und die Formeln aus Theorem 4.5.2, die übrigens auch als *indische Formeln* bekannt sind.

(c) Zeigen Sie, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein pythagoräisches Dreieck mit Inkreisradius n gibt.

Hinweis: Sie können das Tripel $(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$ betrachten.