**Übungen zur Zahlentheorie, WWU Münster, Mathematisches Institut, SoSe 2016**
**U. Hartl, K. Halupczok** **Blatt Nr. 11**, 30.06.16

Abgabe: **Donnerstag, 07. Juli 2016**, bis 8:30 Uhr in die Briefkästen im Hörsaalgebäude

**Leseaufgabe:** Kapitel 5.2 und 5.3 bis Montag 4.7. und Kapitel 5.4 bis Donnerstag 7.7.

## Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie einen $\mathrm{ggT}(f, g)$ der beiden Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, wobei

$$f(X) = X^5 + X^3 - 2X^2 - 2,\ g(X) = X^4 + 2X^3 - 14X^2 + 2X - 15,$$

mit Hilfe des euklidischen Algorithmus.

(b) Schreiben Sie das von $f$ und $g$ in $\mathbb{Q}[X]$ erzeugte Ideal als ein Hauptideal.

(c) Schreiben Sie beide Polynome als Produkt von in $\mathbb{Z}[X]$ irreduziblen Polynomen $\in \mathbb{Z}[X]$. Dafür kann das Eisensteinkriterium zum Nachweis der Irreduzibilität herangezogen werden.

(d) Wie lautet deren Zerlegung in Primpolynome in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{C}[X]$?

## Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass das (Gaußsche) Lemma 5.1.2 ein Korollar der folgenden Aussage ist:

Seien $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, sei $T(f)$ ein ggT der Koeffizienten von $f$ und $T(g)$ einer von $g$. Dann ist $T(f)T(g)$ ein ggT der Koeffizienten von $fg$.

## Aufgabe 3

Geben Sie die folgenden Gruppen in der laut dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen (Satz 5.2.5) möglichen Form an.

(a) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$

(c) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ (d) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/160\mathbb{Z}$

**Hinweis:** Zerlegen Sie die Gruppen nach der äquivalenten Formulierung des chinesischen Restsatzes (von Seite 9) zunächst in Gruppen von Primpotenzordnung und setzen Sie diese in der für den Hauptsatz verlangten Form wieder zusammen.