

# Quiz Analysis 1

Mathematisches Institut, WWU Münster

Karin Halupczok

WiSe 2011/2012

Lösungen zu den Aufgaben M1 bis M7 der Probeklausur

- 1 Aufgabe M1: Fragen zu Folgen, Reihen und ihre Konvergenz
- 2 Aufgabe M2: Fragen zur Reihenkonvergenz
- 3 Aufgabe M3: Fragen zur Stetigkeit auf Teilmengen von  $\mathbb{R}$
- 4 Aufgabe M4: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 5 Aufgabe M5: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Monotonie, In- und Surjektivität
- 6 Aufgabe M6: Fragen zu Vektorraumstrukturen und Extremwerten
- 7 Aufgabe M7: Fragen zu Ableitungen und Grenzwerten von Funktionen

## M1, Teilfrage (a)

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Nullfolge.  
Dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  konvergent.

wahr  falsch

wahr  falsch

## M1, Teilfrage (b)

Wenn es ein  $q \in \mathbb{R}$  gibt mit  $0 \leq q < 1$ , so dass für fast alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt:  $|a_{k+1}| \leq q|a_k|$ , so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut.

wahr  falsch

wahr  falsch

## M1, Teilfrage (c)

Jede monoton fallende, beschränkte Folge ist konvergent.

wahr  falsch

wahr  falsch

## M1, Teilfrage (d)

Es gibt eine konvergente Folge, die nur endlich viele Werte annimmt.

wahr  falsch

wahr  falsch

## M1, Teilfrage (e)

Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.

wahr  falsch

wahr  falsch

## M1, Teilfrage (f)

Folgt aus der folgenden Bedingung die Konvergenz der Folge  $(a_j)$  gegen  $c$ ?

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es nur endlich viele  $j$  mit  $|a_j - c| > \varepsilon$ .

wahr  falsch

wahr  falsch

## M1, Teilfrage (g)

Eine Folge mit einer konvergenten Majorante konvergiert und eine Folge mit einer divergenten Majorante divergiert.

wahr  falsch

wahr  falsch

## M1, Teilfrage (h)

Jede monoton fallende Folge ist eine Nullfolge.

wahr  falsch

wahr  falsch

- 1 Aufgabe M1: Fragen zu Folgen, Reihen und ihre Konvergenz
- 2 Aufgabe M2: Fragen zur Reihenkonvergenz
- 3 Aufgabe M3: Fragen zur Stetigkeit auf Teilmengen von  $\mathbb{R}$
- 4 Aufgabe M4: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 5 Aufgabe M5: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Monotonie, In- und Surjektivität
- 6 Aufgabe M6: Fragen zu Vektorraumstrukturen und Extremwerten
- 7 Aufgabe M7: Fragen zu Ableitungen und Grenzwerten von Funktionen

## M2, Teil (a)

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$  ist

• konvergent

wahr  falsch

wahr  falsch

• absolut konvergent

wahr  falsch

wahr  falsch

• alternierend

wahr  falsch

wahr  falsch

• bestimmt divergent

wahr  falsch

wahr  falsch

## M2, Teil (b)

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist

• konvergent

wahr  falsch

wahr  falsch

• absolut konvergent

wahr  falsch

wahr  falsch

• monoton

wahr  falsch

wahr  falsch

• eine Cauchyfolge

wahr  falsch

wahr  falsch

- 1 Aufgabe M1: Fragen zu Folgen, Reihen und ihre Konvergenz
- 2 Aufgabe M2: Fragen zur Reihenkonvergenz
- 3 Aufgabe M3: Fragen zur Stetigkeit auf Teilmengen von  $\mathbb{R}$
- 4 Aufgabe M4: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 5 Aufgabe M5: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Monotonie, In- und Surjektivität
- 6 Aufgabe M6: Fragen zu Vektorraumstrukturen und Extremwerten
- 7 Aufgabe M7: Fragen zu Ableitungen und Grenzwerten von Funktionen

## M3, Teil (a)

Auf welchen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  ist die Funktion stetig?

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x^3$  ist stetig auf

- $\mathbb{R}$

wahr  falsch

wahr  falsch

- $\mathbb{R}_{>0}$

wahr  falsch

wahr  falsch

- $\{0\}$

wahr  falsch

wahr  falsch

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$

wahr  falsch

wahr  falsch

## M3, Teil (b)

Auf welchen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  ist die Funktion stetig?

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$  ist stetig auf

- $\mathbb{R}$

wahr  falsch

wahr  falsch

- $\mathbb{Z}$

wahr  falsch

wahr  falsch

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

wahr  falsch

wahr  falsch

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

wahr  falsch

wahr  falsch

- 1 Aufgabe M1: Fragen zu Folgen, Reihen und ihre Konvergenz
- 2 Aufgabe M2: Fragen zur Reihenkonvergenz
- 3 Aufgabe M3: Fragen zur Stetigkeit auf Teilmengen von  $\mathbb{R}$
- 4 Aufgabe M4: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 5 Aufgabe M5: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Monotonie, In- und Surjektivität
- 6 Aufgabe M6: Fragen zu Vektorraumstrukturen und Extremwerten
- 7 Aufgabe M7: Fragen zu Ableitungen und Grenzwerten von Funktionen

## M4, Teilfrage (a)

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit der Eigenschaft  $f(x + 1) = f(x)$ .  
Dann ist  $f$  beschränkt.

wahr  falsch

wahr  falsch

## M4, Teilfrage (b)

Sei  $A = [0, 1]$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nimmt  $f$  auf  $A$  ein Maximum an.

wahr  falsch

wahr  falsch

## M4, Teilfrage (c)

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  ist stetig.

wahr  falsch

wahr  falsch

## M4, Teilfrage (d)

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton und surjektiv, so ist  $f$  auch bijektiv.

wahr  falsch

wahr  falsch

## M4, Teilfrage (e)

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, falls für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(x - \frac{1}{n}\right).$$

wahr  falsch

wahr  falsch

## M4, Teilfrage (f)

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv, so existiert genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 0$ .

wahr  falsch

wahr  falsch

## M4, Teilfrage (g)

Sei  $A = [a, b] \cup [c, d]$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist  $f$  beschränkt.

wahr  falsch

wahr  falsch

## M4, Teilfrage (h)

Ist  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  stetig, so existiert ein  $x \in [0, 1]$  mit  $f(x) = x$ .

wahr  falsch

wahr  falsch

- 1 Aufgabe M1: Fragen zu Folgen, Reihen und ihre Konvergenz
- 2 Aufgabe M2: Fragen zur Reihenkonvergenz
- 3 Aufgabe M3: Fragen zur Stetigkeit auf Teilmengen von  $\mathbb{R}$
- 4 Aufgabe M4: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 5 Aufgabe M5: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Monotonie, In- und Surjektivität**
- 6 Aufgabe M6: Fragen zu Vektorraumstrukturen und Extremwerten
- 7 Aufgabe M7: Fragen zu Ableitungen und Grenzwerten von Funktionen

## M5, Teil (a)

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \lfloor x \rfloor$ , ist

- injektiv

wahr  falsch

wahr  falsch

- surjektiv

wahr  falsch

wahr  falsch

- bijektiv

wahr  falsch

wahr  falsch

- monoton steigend

wahr  falsch

wahr  falsch

## M5, Teil (b)

Die Funktion  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \sqrt{x}$ , ist

- stetig

wahr  falsch

wahr  falsch

- stetig differenzierbar

wahr  falsch

wahr  falsch

- konvex

wahr  falsch

wahr  falsch

- monoton steigend

wahr  falsch

wahr  falsch

- 1 Aufgabe M1: Fragen zu Folgen, Reihen und ihre Konvergenz
- 2 Aufgabe M2: Fragen zur Reihenkonvergenz
- 3 Aufgabe M3: Fragen zur Stetigkeit auf Teilmengen von  $\mathbb{R}$
- 4 Aufgabe M4: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 5 Aufgabe M5: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Monotonie, In- und Surjektivität
- 6 Aufgabe M6: Fragen zu Vektorraumstrukturen und Extremwerten
- 7 Aufgabe M7: Fragen zu Ableitungen und Grenzwerten von Funktionen

## M6, Teil (a)

Die Menge aller stetigen Abbildungen  $f : \mathbb{R} \rightarrow W$ ,  $W \subseteq \mathbb{C}$  bildet mit  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  und  $(rf)(x) = rf(x)$  einen reellen Vektorraum, falls

- $W = [0, 1]$

wahr  falsch

wahr  falsch

- $W = \mathbb{R}$

wahr  falsch

wahr  falsch

- $W = \mathbb{C}$

wahr  falsch

wahr  falsch

- $W = \mathbb{R}_{>0}$

wahr  falsch

wahr  falsch

## M6, Teil (b)

Das Maximum der differenzierbaren Funktion  $f : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$

- ist ein lokales Maximum

wahr  falsch

wahr  falsch

- ist ein globales Maximum

wahr  falsch

wahr  falsch

- wird zweimal angenommen

wahr  falsch

wahr  falsch

- ist gleich  $\frac{1}{2}$

wahr  falsch

wahr  falsch

- 1 Aufgabe M1: Fragen zu Folgen, Reihen und ihre Konvergenz
- 2 Aufgabe M2: Fragen zur Reihenkonvergenz
- 3 Aufgabe M3: Fragen zur Stetigkeit auf Teilmengen von  $\mathbb{R}$
- 4 Aufgabe M4: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- 5 Aufgabe M5: Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Monotonie, In- und Surjektivität
- 6 Aufgabe M6: Fragen zu Vektorraumstrukturen und Extremwerten
- 7 Aufgabe M7: Fragen zu Ableitungen und Grenzwerten von Funktionen

## M7, Teil (a)

Die vierte Ableitung von  $\cos x \cdot e^{-x}$

- ist  $-4 \cos x \cdot e^{-x}$

wahr  falsch

wahr  falsch

- ist stetig

wahr  falsch

wahr  falsch

- ist  $4x \cos x \cdot e^{-x}$

wahr  falsch

wahr  falsch

- existiert nicht

wahr  falsch

wahr  falsch

## M7, Teil (b)

Der Grenzwert von  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}$  für  $x \rightarrow 0$

- ist negativ

wahr  falsch

wahr  falsch

- ist  $e^{-3/2}$

wahr  falsch

wahr  falsch

- ist 1

wahr  falsch

wahr  falsch

- existiert nicht

wahr  falsch

wahr  falsch