Extra-Quiz zur Analysis 1

Mathematisches Institut, WWU Münster

Karin Halupczok

WiSe 2011/2012

Weitere Quizfragen zu diversen Analysis 1-Themen

Frage 1

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ ist injektiv.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 2

Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ ist injektiv.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 3

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$ ist bijektiv.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 4

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^3$ ist injektiv.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 5

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^3, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ ist injektiv.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 6

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton und surjektiv, so ist f auch bijektiv.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 7

Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist streng monoton fallend.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Extra-Quiz zur Analysis 1
└Fragen zu Funktionen und ihre Eigenschaften wie Monotonie, In- und Surjektivität

Frage 8

Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\log x}$, besitzt eine Umkehrfunktion (definiert auf dem Bild von f).

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 9

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(I) \subseteq J$. Sind f und g beide streng monoton wachsend, so ist $f \circ g$ streng monoton wachsend.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 10

Für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ streng monoton wachsend.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 1

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit nur positiven Folgengliedern. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 2

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Dann ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 3

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge aus reellen Zahlen $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 4

Existiert ein $q > 0$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 5

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und ist $b_n = a_{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 6

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = c$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergiert und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 7

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn die beiden Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 8

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn die drei Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 9

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ und ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle hinreichend großen n gilt, so ist auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert c.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 10

In $M = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid p, q \in \mathbb{N}, p^2 \leq 2q^2\}$ existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 1

Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ konvergiert.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Extra-Quiz zur Analysis 1
└ Fragen zur Reihenkonvergenz

Frage 2

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n$.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 3

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ konvergiert absolut.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 4

Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(\log n)}$ konvergiert absolut.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 5

Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \log(n) e^{-n}$ konvergiert absolut.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 6

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 7

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, falls es eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $|a_n| \leq |b_n|$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ gibt.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 8

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 9

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 10

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge nichtnegativer reeller Zahlen. Dann gilt: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 1

Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 2

Für $0 < a < 1$ existiert der Grenzwert $\lim_{x \to 0} (2 - a^{1/x})^x$.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 3

Der Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x)$ einer reellen Funktion f existiert genau dann, wenn $\lim_{x \to 0} f(|x|)$ existiert.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 4

Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ einer reellen Funktion f existiert genau dann, wenn $\lim_{x\to 0} |f(x)|$ existiert.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 5

Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ einer reellen Funktion f ist gleich 0 genau dann, wenn $\lim_{x\to 0} |f(x)| = 0$ ist.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 6

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = g(x)$.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 7

Die Gleichung $\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$ hat eine positive reelle Lösung.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 8

Eine im Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

für alle $x, y \in I$ ist.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Extra-Quiz zur Analysis 1
└Fragen zu Grenzwerten von Funktionen und Stetigkeit

Frage 9

Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$, kann im Punkt $x = 0$ stetig fortgesetzt werden.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 10

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - |x|$ ist stetig bei $x = 0$.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 1

Eine differenzierbare, streng monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt eine differenzierbare Umkehrfunktion (definiert auf dem Bild von f).

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 2

Eine differenzierbare, streng monoton wachsende Funktion hat überall auf ihrem Definitionsbereich eine nichtnegative Ableitung.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 3

Jede stetige Funktion $f : I \to R$ auf einem abgeschlossenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 4

Jede differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Minimum und ein Maximum.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 5

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^{n+1}, & x > 0 \end{cases}$ ist $(n+1)$-mal stetig differenzierbar.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 6

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die Ableitung einer beliebigen geraden Funktion ist gerade.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 7

Für jede nahe $a \in \mathbb{R}$ zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 8

Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) = f(b)$ existiert ein $c \in [a, b]$ mit $f'(c) = 0$.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 9

Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) = f(b)$ existiert ein $c \in [a, b]$ mit $f'(c) > 0$.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 10

Der Satz von Rolle ist ein Spezialfall des Mittelwertsatzes.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 1

Ist $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 2

Ist $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Stammfunktion F, so gilt

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 3

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

stetig auf $[a, b]$.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 4

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ ist Riemann-integrierbar auf $[0, 1]$.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 5

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Für $c > 0$ gilt dann

$$\int_a^b f(x + c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx.$$

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 6

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Für $c > 0$ gilt dann

$$\int_a^b f(cx)dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)dx.$$

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 7

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ist auf $[-1, 1]$ Riemann-integrierbar und besitzt dort eine Stammfunktion.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 8

Ist $f(x) > 0$ auf $[a, b]$, so ist $\int_a^b f(x)dx > 0$.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☒ *falsch* ☐

Frage 9

Ist $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$, so ist $\int_a^b f(x)dx > 0$.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒

Frage 10

Ist $f(x) > 0$ für ein $x \in [a, b]$, so ist $\int_a^b f(x)dx > 0$.

wahr ☐ *falsch* ☐

wahr ☐ *falsch* ☒